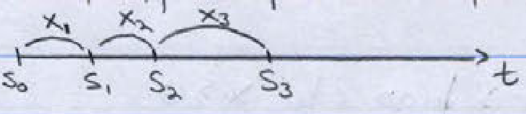
14° Μάθημα 31/3/17.

Ανανεωτική Θεωρία - Βασικοί υπολογισμοί

1) Ορισμός

$X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες, ισόνομες, μη αρνητικές τ.μ. με συνάρτηση κατανομής $G(x)$

$S_0=0$, $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$



Η $\{S_n : n\geq 0\}$ λέγεται ανανεωτική ακολουθία και

$N(t)=\sup\{n\geq 0 : S_n\leq t\}=\#$ γεγονότων στο $(0,t]$ λέγεται (απαριθμήτρια) ανανεωτική διαδικασία.

2) Βασικές ποσότητες

i) Κατανομή χρόνου n-οστού γεγονότος

$F_{S_n}(x)=P(S_n\leq x)=P(X_1+X_2+\ldots+X_n\leq x)=(G*G*\ldots*G)(x)=G^{*n}(x)$

όπου αν X,Y ανεξ. με σ.κ. $G_X(x)$, $G_Y(y)$ τότε $(G_X*G_Y)(t)=P(X+Y\leq t)$

Αναλυτικά,

για X,Y συνεχείς με πυκνότητες $g_X(x), g_Y(y)$

$$(G_X*G_Y)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}P(X+y\leq t)\cdot g_Y(y)\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}F_X(t-y)\,g_Y(y)\,dy$$

για X,Y διακριτές

$$(G_X*G_Y)(t)=\sum_y F_X(t-y)P_Y(y)$$

ii) Κατανομή πλήθους γεγονότων στο $(0,t]$

για $t\geq 0$, $P_n(t)=P(N(t)=n)=P(S_n\leq t<S_{n+1})=P(S_n\leq t)-P(S_{n+1}\leq t)=G^{*n}(t)-G^{*(n+1)}(t)$

ισχύει για $n\geq 0$ με τη σύμβαση $G^{*0}(t)=1$.

iii) Ανανεωτική συνάρτηση $M(t)=E[N(t)]$

$$E[N(t)]=E\Big[\sum_{n=1}^{\infty}1\{S_n\leq t\}\Big]=\sum_{n=1}^{\infty}E[1\{S_n\leq t\}]=\sum_{n=1}^{\infty}P(S_n\leq t)=\sum_{n=1}^{\infty}G^{*n}(t).$$

3) Ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes

Αν έχουμε $F(t)$ δεξιά συνεχής, αύξουσα με αριθμήσιμο πλήθος σημείων ασυνέχειας έστω $\{x_1, x_2, \dots\}$, $x_1 < x_2 < \dots$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \dots\}$

Τότε αν $g(t)$ συνεχής: $\int_a^b g(t)\,dF(t) = \int_a^b g(t)F'(t)\,dt + \sum_{x_i \in [a,b]} g(x_i)(F(x_i) - F(x_i^-))$

Με αυτό τον συμβολισμό:

$(G_X * G_Y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(t-y)\,dG(y)$

Επίσης ο μετασχηματισμός L-S μιας τ.μ. $X \geq 0$

$$\tilde{G}_X(s) = E[e^{-sX}] = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-sx} f_X(x)\,dx & , X \text{ συνεχής} \\ \sum_x e^{-sx} P_X(x) & , X \text{ διακριτή} \end{cases} = \int_0^\infty e^{-sx}\,dG_X(x)$$

Επίσης αν X τ.μ. με συνάρτηση κατανομής $G_X(t)$ τότε $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dG_X(x)$

4) Μετασχηματισμός L-S των βασικών ποσοτήτων

$\tilde{F}_{S_n}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dF_{S_n}(x) = [\tilde{G}(s)]^n$

$\tilde{P}_n(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dP_n(t) = [\tilde{G}(s)]^n - [\tilde{G}(s)]^{n+1}$

$M(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,dM(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{G}(s))^n = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}$

5) Διαδικασία υπολογισμού των $F_{S_n}(x), P_n(t), M(t)$, με μετασχηματισμό L-S

1° βήμα: Υπολογισμός της $\tilde{G}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\,dG(x)$

2° βήμα: Υπολογισμός των $\tilde{F}_{S_n}(s), \tilde{P}_n(s), \tilde{M}(s)$

3° βήμα: Αντιστροφή μετασχηματισμού.

Συνάρτηση	Μετασχηματισμός	τ.μ.
$F(t) = 1 \quad t \geq 0$	$\tilde{F}(s) = 1$	$X = 0$
$F(t) = t \quad , t \geq 0$	$\tilde{F}(s) = \frac{1}{s}$	—
$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0$	$\tilde{F}(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}$	$X \sim Exp(\lambda)$
$F(t) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$	$\tilde{F}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$	$X \sim Erlang(n, \lambda)$
$F_Z(t) = (F_X * F_Y)(t)$	$\tilde{F}_Z(s) = \tilde{F}_X(s) \cdot \tilde{F}_Y(s)$	$Z = X + Y$
$F_Z(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i F_{X_i}(t)$	$\tilde{F}_Z(s) = \sum_{i=1}^{n} p_i \tilde{F}_{X_i}(s)$	$Z = \begin{cases} x_1 & \text{πιθ } p_1 \\ x_2 & \text{πιθ } p_2 \\ x_n & \text{πιθ } p_n \end{cases}$

6) Παράδειγμα 1

Βασικοί υπολογισμοί για $G(x) \sim Exp(\lambda)$

$G(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$

1ο βήμα: $\tilde{G}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$

2ο βήμα: $\tilde{F}_{S_n}(s) = (\tilde{G}(s))^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$

$\tilde{P}_n(s) = (\tilde{G}(s))^n - (\tilde{G}(s))^{n+1} = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n - \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{n+1}$

$\tilde{M}(s) = \dfrac{\frac{\lambda}{\lambda+s}}{1-\frac{\lambda}{\lambda+s}} = \frac{\lambda}{s}$.

3ο βήμα: $F_{S_n}(t) = \sum_{k=n}^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$

$P_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$

$M(t) = \lambda t$

7) Παράδειγμα 2. Βασικοί υπολογισμοί

$$X = \begin{cases} 0 & \text{με πιθ } p \\ Exp(\lambda) & \text{με πιθ } 1-p. \end{cases}$$

$G(x) = p + (1-p)(1-e^{-\lambda x}), \quad x \geq 0$

1ο βήμα: $\tilde{G}(s) = p + (1-p)\frac{\lambda}{\lambda+s} = \frac{\lambda+ps}{\lambda+s}$.

2ο βήμα: $\tilde{F}_{S_n}(s) = \left[\frac{\lambda+ps}{\lambda+s}\right]^n$

$$\tilde{P}_n(s) = \left(\frac{\lambda+ps}{\lambda+s}\right)^n - \left(\frac{\lambda+ps}{\lambda+s}\right)^{n+1}, \quad \tilde{M}(s) = \dfrac{\frac{\lambda+ps}{\lambda+s}}{1-\frac{\lambda+ps}{\lambda+s}}$$

3ο βήμα: $\tilde{F}_{S_n} = \left(\frac{\lambda+ps}{\lambda+s}\right)^n \underset{\text{πολυωνύμων}}{\overset{\text{διαίρεση}}{=}} \left(p + \frac{\lambda(1-p)}{s+\lambda}\right)^n = \sum \binom{n}{i}\left(\frac{\lambda(1-p)}{s+\lambda}\right)^i p^{n-i}$

$= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}(1-p)^i p^{n-i}\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^i$ άρα $F_{S_n}(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}(1-p)^i p^{n-i} \sum_{k=i}^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$

όμοια για $P_n(t)$

και $\tilde{M}(s) = \dfrac{\frac{\lambda+ps}{\lambda+s}}{1-\frac{\lambda+ps}{\lambda+s}} = \frac{\lambda+ps}{(1-p)s} = \frac{p}{1-p} + \frac{\lambda}{1-p}\frac{1}{s}$.

$\Rightarrow M(t) = \frac{p}{1-p} + \frac{\lambda t}{1-p}$

8) Παράδειγμα 3

$$X=\begin{cases} Exp(\lambda) & \text{πιθ. } p \\ Exp(\mu) & \text{πιθ } (1-p) \end{cases}$$

$$G(x)=p(1-e^{-\lambda x})+(1-p)(1-e^{-\mu x})$$

$$\tilde{G}(s)=p\frac{\lambda}{\lambda+s}+(1-p)\frac{\mu}{\mu+s}$$

$$\tilde{F}_{S_n}(s)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}p+(1-p)\frac{\mu}{\mu+s}\right)^n=\sum_{i=0}^{n}p^i(1-p)^{n-i}\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^i\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{n-i}$$

$$\tilde{F}_{S_n}(t)=\sum_{i=1}^{n}p^i(1-p)^{n-i}F_{i,n-i}(t) \quad \text{όπου} \quad F_{i,n-i}(t)=\int_0^{\infty}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{σ.κ. Erlang}(i,\lambda)}}{F_X}(t-y)\,dF_Y(y)$$

$$\tilde{M}(s)=\frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}=\frac{\lambda\mu+(p\lambda+(1-p)\mu)s}{s(s+\lambda+\mu-\lambda p-\mu(1-p))}=\frac{\lambda\mu+(p\lambda+(1-p)\mu)s}{s(s+\lambda(1-p)+\mu p)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+\lambda(1-p)+\mu p}$$

$$\Longrightarrow M(t)=At+\frac{B}{\lambda(1-p)+\mu p}\left(1-e^{-(\lambda(1-p)+\mu p)t}\right)$$