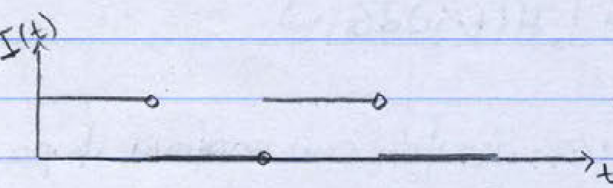
17° Μάθημα 28/4/2017.

Ανανεωτική Θεωρία και Εφαρμογές

1) 3 βασικά εργαλεία

- ΣΑΘΑ: $\lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R_1]}{E[X_1]} = \frac{r}{\mu}$
- Αναν. εξίσωση και η λύση της: $H(t) = D(t) + (H*G)(t)$
  $\Rightarrow H(t) = D(t) + (D*M_G)(t)$
- ΒΑΘ: Αν $G(t)$ απεριοδική, $D(t)$ διαφορά μη-αρνητικών φραγμένων και μονότονων συναρτήσεων, και το $\int_0^\infty |D(t)|dt < \infty$
  $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{\int_0^\infty D(t)dt}{\mu}$.

2) Εφαρμογή 1: Εναλλασσόμενη ανανεωτική διαδικασία



Μηχανή
← λειτουργία
← αργία

$(U_n, D_n) \sim G_{U,D}(t,s)$ συνεχής
(U_n, D_n) ανεξ. ισόνομα
$E[U_n] = \mu_U$, $E[D_n] = \mu_D$.

i) Μακροπρόθεσμος μέσος χρόνος λειτουργίας $= \lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t I(u)du]}{t}$

ii) Πιθανότητα λειτουργίας τη στιγμή $t = P(I(t)=1)$

iii) Οριακή πιθ. λειτουργίας $= \lim_{t\to\infty} P(I(t)=1)$

Λύση

i) $R(t) = \int_0^t I(u)du$ → χρόνος λειτ. στο $[0,t]$

$(X_n, R_n) = (U_n + D_n, U_n)$ ανεξ. ισόνομα $n \geq 1$ → ΣΑΘΑ εφαρμόσιμο

άρα $\lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t I(u)du]}{t} = \frac{E[R_1]}{E[X_1]} = \frac{\mu_U}{\mu_U + \mu_D}$

ii) $H(t) = P(I(t)=1) \Rightarrow H(t) = \int_0^\infty P(I(t)=1 \mid X_1 = u)\, dG(u)$

και $P(I(t)=1 \mid X_1 = u) = \begin{cases} P(U_1 > t \mid U_1 + D_1 = u) & u > t \\ P(I(t-u)=1) & u \leq t \end{cases}$

$$H(t) = \int_t^\infty P(U_1 > t \mid U_1 + D_1 = u)\, dG(u) + \int_0^t H(t-u)\, dG(u)$$

ii) $D(t)=\int_t^{\infty} P(U_1>t \mid U_1+D_1=u)\,dG(u)=\int_t^{\infty} \overbrace{P(U_1>t \mid U_1+D_1=u)\,g_{U_1+D_1}(u)}^{P(U_1>t,\,U_1+D_1>t)}$

$= P(U_1>t) = 1-G_U(t)$

$H(t)=\underbrace{1-G_U(t)}_{D(t)}+(H*G)(t)$

Λύση ανav. εξ.: $H(t)=(1-G_U(t))+\int_0^t (1-G_U(t-u))\,dM_G(u)$

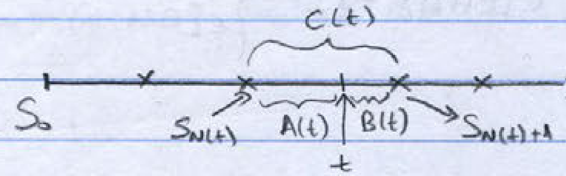
iii) $G(t)$ απεριοδική (συνεχής)

η $D(t)=1-G_U(t)\geq 0$ φραγμένη και φθίνουσα

$\int_0^{\infty}|D(t)|\,dt=\int_0^{\infty}(1-G_U(t))\,dt=\mu_U<\infty$.

$\xrightarrow{\text{ΒΑΘ}} \lim_{t\to\infty} P(I(t)=1)=\frac{\int_0^{\infty}D(t)\,dt}{\mu}=\frac{\mu_U}{\mu_U+\mu_D}$.

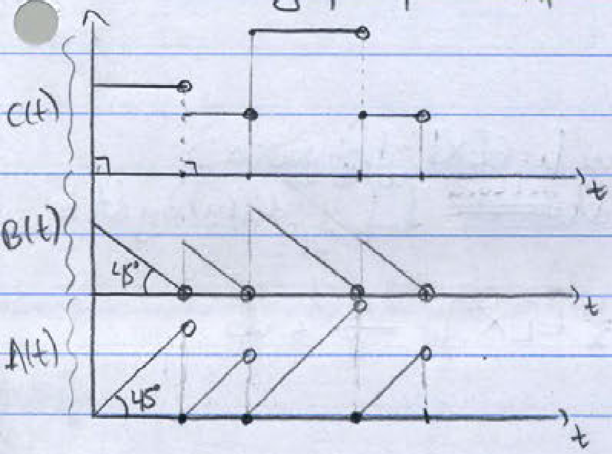
3) Ηλικία, Υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης, t-εξαρτώμενος χρόνος



$A(t)$: Ηλικία ή προσδρομικός (ή αναδρομικός) χρόνος ανανέωσης $\to t-S_{N(t)}$

$B(t)$: Υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης $\to S_{N(t)+1}-t$

$C(t)$: t-εξαρτώμενος χρόνος $\to S_{N(t)+1}-S_{N(t)}$



4) Υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης - Μέση τιμή

$\{N(t)\}$ αναν. διαδικασία με χρ. γεγονότων $S_1, S_2, \dots$, ενδιάμεσοι χρ. $X_1, X_2, \dots \sim G$, $E[X^r]$ (ροπή r τάξης) $= \mu_r$

$B(t) = S_{N(t)+1} - t$

i) $\lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t B(u)du]}{t}$ (Μακρ. μέσος όρος της $B(t)$).

ii) $E[B(t)] = ;$

iii) $\lim_{t\to\infty} E[B(t)] = ;$

Λύση

Ορίζω $R(t) = \int_0^t B(u)du$

$(X_n, R_n) = ;$, $R_n = \int_{S_{n-1}}^{S_n} B(u)du = \frac{X_n^2}{2}$ (ισοσκ. τρίγωνο) $\Rightarrow (X_n, R_n) = (X_n, \frac{X_n^2}{2})$ ανεξ. ισόνομα $n \geq 1$.

$$\overset{\text{ΙΑΘΑ}}{\Longrightarrow} \lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t B(u)du]}{t} = \frac{E[R_1]}{E[X_1]} = \frac{\mu_2}{2\mu_1}.$$

ii) $H(t) = E[B(t)] = \int_0^\infty E[B(t) \mid X_1 = u]\, dG(u)$, $E[B(t)\mid X_1 = u] = \begin{cases} u-t & u>t \\ E[B(t-u)] & u \leq t \end{cases}$

$$\Rightarrow H(t) = \underbrace{\int_t^\infty (u-t)\, dG(u)}_{D(t)} + \int_0^t H(t-u)\, dG(u).$$

$$D(t) = \int_t^\infty (u-t)\, dG(u) = \int_t^\infty \int_0^{u-t} dx\, dG(u) = \int_0^\infty \int_{t+x}^\infty dG(u)\, dx =$$

$$= \int_0^\infty (1 - G(t+x))dx \ \underset{t\ \ dy=dx}{\overset{y=t+x}{=\!=}} \int_t^\infty (1 - G(y))\, dy \geq 0.$$

Άρα $E[B(t)] = D(t) + \int_0^t D(t-u)\, dM_G(u)$

iii) $G(t)$ απεριοδική (συνεχής)

$D(t) = \int_t^\infty (1-G(y))dy \geq 0$, φραγμένη από την $\mu = E[X]$, φθίνουσα.

και $\int_0^\infty |D(t)|dt = \int_0^\infty D(t)dt = \int_0^\infty \int_t^\infty (1-G(y))\,dy\,dt \overset{\text{αλλαγή}}{=\!=\!=} \int_0^\infty \int_t^\infty \int_y^\infty dG(u)\, dy\, dt =$

$$= \int_0^\infty \int_0^u \int_0^y dt\, dy\, dG(u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^2\, dG(u) = \frac{1}{2} E[X^2] = \frac{\mu_2}{2} < \infty.$$

$$\underset{\text{εφαρμ.}}{\overset{\text{ΒΑΘ}}{\Longrightarrow}} \lim_{t\to\infty} E[B(t)] = \frac{\frac{\mu_2}{2}}{\mu_1} = \frac{\mu_1}{2\mu_2}.$$

5) Το αναγεννητικό παράδοξο.

$$\lim_{t\to\infty} E[B(t)] = \frac{E[X^2]}{2E[X]}$$, X ενδιάμεσοι χρόνοι.

$$= \frac{(E[X])^2 + Var[X]}{2E[X]} = \frac{E[X]}{2} + \frac{Var[X]}{2E[X]}.$$