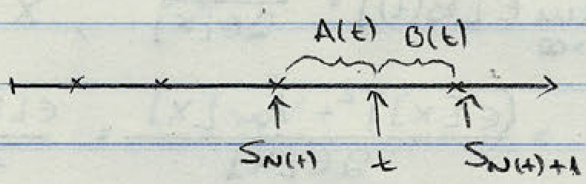
18° Μάθημα 3/5/2017

Ηλικία, Υπολειπόμενος και t-εξαρτώμενος χρόνος ανανέωσης

1) Πλαίσιο



$\{N(t)\}$ ανάν. διαδικασία

$S_1, S_2 \ldots$ χρόνοι γεγ.

$X_1, X_2, \ldots$ ενδιάμεσοι χρόνοι

$E[X_i]=\mu$, $Var[X_i]=\sigma^2$

$A(t)=t-S_{N(t)} \rightarrow$ ηλικία

$B(t)=S_{N(t)+1}-t \rightarrow$ υπολειπόμενος χρόνος

$C(t)=S_{N(t)+1}-S_{N(t)} \rightarrow$ t-εξαρτώμενος

2) Μελέτη του μέσου της $\{B(t)\}$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t B(u)\,du\right]}{t} = \frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu} = \frac{\mu}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu}.$$

$$E[B(t)] = \underbrace{\int_t^\infty (1-G(u))\,du}_{D(t)} + \int_0^t D(t-u)\,dG(u)$$

$$\lim_{t\to\infty} E[B(t)] = \frac{\mu}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu}.$$

3) Ανανεωτικό παράδοξο

Μέσος υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης $\geq \dfrac{\text{Μέσος ενδιαμ. χρόνος}}{2}$

4) Μελέτη της κατανομής $B(t)$

Επικεντρωνόμαστε στο $\{B(t)>x\}$ για συγκεκριμένο x.

Μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης είναι μεγαλύτερος από x. $= \lim_{t\to\infty} \dfrac{E\left[\begin{matrix}\text{χρόνος στο } [0,t] \\ \text{που } B(u)>x\end{matrix}\right]}{t}$

i) $\lim_{t\to\infty} \dfrac{E\left[\int_0^t 1\{B(u)>x\}du\right]}{t} = ;$

ii) $P(B(t)>x) = ;$

iii) $\lim_{t\to\infty} P(B(t)>x) = ;$

Υπολογισμοί

i) Θέτω $R(t) = \int_0^t 1\{B(u)>x\}du$.

R_n = χρόνος στο $[S_{n-1}, S_n]$ που $B(u)>x = \int_{S_{n-1}}^{S_n} 1\{B(u)>x\}du =$

$$= \begin{cases} X_n - x & \text{αν } X_n \geq x \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} = \max(X_n - x, 0) = (X_n - x)^+$$

Άρα $(X_n, R_n) = (X_n, (X_n - x)^+)$ ανεξ. ισον. $n \geq 1$.

$$\overset{\Sigma \Lambda \Theta A}{\Longrightarrow} \lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1\{B(u)>x\}du\right]}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} = \frac{E[R_1]}{E[X_1]} =$$

$$= \frac{E[(X_n - x)^+]}{E[X_1]}$$

Έχω $E[(X_n - x)^+] = \int_0^\infty P((X_1 - x)^+ > u)du = \int_0^\infty P(\max(X_1 - x, 0) > u)du$

$$= \int_0^\infty P(X_1 - x > u)du = \int_0^\infty P(X_1 > u + x)du = \int_x^\infty P(X_1 > y)dy = \int_x^\infty (1 - G(y))dy$$

Άρα $\lim_{t\to\infty} \dfrac{E\left[\int_0^t 1\{B(u)>x\}du\right]}{t} = \dfrac{\int_x^\infty (1 - G(y))dy}{\mu}$

ii) $H(t) = P(B(t)>x)$ Δεσμεύω στο X_1

$H(t) = \int_0^\infty P(B(t)>x \mid X_1 = u)dG(u)$

$$P(B(t)>x \mid X_1 = u) = \begin{cases} \dfrac{P(B(t-u)>x)}{H(t-u)} & u \leq t \\ 0 & u - x \leq t \leq u \\ 1 & t < u - x \end{cases}$$

Άρα $H(t) = \int_{x+t}^\infty dG(u) + \int_0^t H(t-u)dG(u) = \underbrace{1 - G(x+t)}_{D(t)} + \int_0^t H(t-u)dG(u)$

Άρα η λύση της είναι: $P(B(t)>x) = H(t) = D(t) + \int_0^t D(t-u)dG(u)$

$$= 1 - G(x+t) + \int_0^t (1 - G(x+t-u))\, dM_G(u)$$

iii) G συνεχής άρα αη-ριοδική

$D(t) = 1 - G(x+t) \geq 0$ φραγμένη, φθίνουσα

και $\int_0^\infty |D(t)|\,dt = \int_0^\infty (1 - G(t+x))\,dt = \int_x^\infty (1 - G(y))\,dy \leq \int_0^\infty (1 - G(y))\,dy = \mu < \infty$

Άρα απο ΒΑΘ έχουμε:

$$\lim_{t\to\infty} P(B(t) > x) = \frac{\int_0^\infty D(t)\,dt}{t} = \frac{\int_x^\infty (1 - G(y))\,dy}{\mu}.$$

5) Πόρισμα

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1\{B(u) > x\}\,du\right]}{t} = \lim_{t\to\infty} P(B(t) < x) = 1 - \frac{\int_x^\infty (1 - G(y))\,dy}{\mu} =$$

$$= \frac{\int_0^x (1 - G(y))\,dy}{\mu} \longleftarrow \text{Κατανομή ισορροπίας της G.}$$

Διαισθητικά

$G(x) \longrightarrow G_e(x)$

Κατανομή ενδ. χρόνων ανανέωσης $\rightarrow$ Κατανομή υπολειπόμενου χρ. ανανέωσης.

6) Χαρακτηριστικά της $G_e(x)$

Έστω $G(x)$ σ.κ., $g(x)$ σ.π.π. με $E[X] = \mu$, $Var[X] = \sigma^2$ μετασχ. L-S $\tilde{G}(s)$ και $G_e(x)$ η αντίστοιχη κατανομή ισορροπίας.

σ.κ. $G_e(x) = \dfrac{\int_0^x (1 - G(y))\,dy}{\mu}$, $x \geq 0$.

σ.π.π. $g_e(x) = \dfrac{1 - G(x)}{\mu}$, $x \geq 0$, $E[X_e] = \dfrac{\mu}{2} + \dfrac{\sigma^2}{2\mu}$.

$$\tilde{G}_e(s) = \frac{1 - \tilde{G}(s)}{\mu s} \quad *$$

Απόδειξη *

$$\tilde{G}_e(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dG_e(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-sx}(1 - G(x))\,dx = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-sx}\int_x^\infty dG(y)\,dx =$$

$$\overset{\text{σχεση}}{=} \frac{1}{\mu}\int_0^\infty \int_0^y e^{-sx}\,dx\, dG(y) = \frac{1}{\mu s}\left(\int_0^\infty dG(y) - \int_0^\infty e^{-sy}\,dG(y)\right) = \frac{1 - \tilde{G}(s)}{\mu s}.$$

7) Κλασσικό λόγος $G(x)$, $G_e(x)$

$G(x)$ | $G_e(x)$

- Σταθερή $= c$. → Uniform$([0,c])$

$$\left(G(x) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases} \longrightarrow G_e(x) = \frac{1}{c},\ 0 \leq x \leq c \right)$$

- Εκθετική: $Exp(\lambda)$ → $Exp(\lambda)$
- $Erlang(2,\lambda)$ → Μίξη $Exp(\lambda)$, $Erlang(2,\lambda)$ με πιθ: $1/2$, $1/2$.

8) Μελέτη του $A(t)$

$\lim_{t\to\infty} E[A(t)] = ;$, $\lim_{t\to\infty} P(A(t) \leq x) = ;$

Έχω $\{A(t) > x\} = \{$όχι ανανεωτ. γεγονότα στο $(t-x,t)\} = \{B(t-x) > x\}$

$$\lim_{t\to\infty} P(A(t) > x) = \lim_{t\to\infty} P(B(t-x) > x) = \lim_{y\to\infty} P(B(y) > x) = \frac{\int_x^\infty (1-G(y))dy}{\mu}.$$

9) Μελέτη των $(A(t), B(t))$

$$P(A(t) > x, B(t) > y) \rightsquigarrow P\begin{pmatrix}\text{όχι ανανεωτ. γεγονότα} \\ \text{στο } (t-x, t+x)\end{pmatrix} = P(B(t-x) > x+y)$$

έχω $\lim_{t\to\infty} P(A(t) > x, B(t) > y) = \lim_{t\to\infty} P(B(t-x) > x+y) =$

$$= \lim_{s\to\infty} P(B(s) > x+y) = \frac{\int_{x+y}^\infty (1-G(u))du}{\mu}$$

$A(t), B(t)$ <u>ΔΕΝ</u> είναι ανεξ.

10) Μελέτη του $C(t)$

Έχω $C(t) = A(t) + B(t)$

$$\lim_{t\to\infty} E[C(t)] = 2\left(\frac{\mu}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu}\right) = \mu + \frac{\sigma^2}{\mu}.$$