19° Μάθημα 5/5/2017.

Ανανεωτική Θεωρία - Ασκήσεις

1) Βασικές Τεχνικές

1) υπολογισμός ανανεωτικής συνάρτησης.

$\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία με κατανομή ενδ. χρόνων $\sim G(x)$

$\rightsquigarrow M(t)=E[N(t)]$

1η ιδέα: $M(t)=\sum_{n=1}^{\infty} G^{*(n)}(t)$.

2η ιδέα: $G(t) \to \tilde{G}(s) \to \tilde{M}(s)=\frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)} \to M(t)$.

3η ιδέα: $M(t)=G(t)+\int_0^t M(t-u)\,dG(u)$.

2) Υπολογισμός μακροπρόθεσμου μέσου κόστους/μέσης αμοιβής ανά χρ. μον. σε μοντέλο με ανανεωτική διαδικασία και δομή κόστους/αμοιβής.

ΣΑΘΑ
- → Προσδιορισμός υποκείμενης ανανεωτικής διαδικασίας.
- → Έλεγχος υποθέσεων του ΣΑΘΑ
- → Υπολογισμός $E[X_n]$, $E[R_n]$ και εφαρμογή ΣΑΘΑ.

3) Υπολογισμός πιθ., μέσων τιμών κλπ σε μοντέλο με υποκ. ανανεωτική διαδικασία, ΣΑΘΑ, Ανανεωτικές εξισώσεις - Λύση, ΒΑΘ.

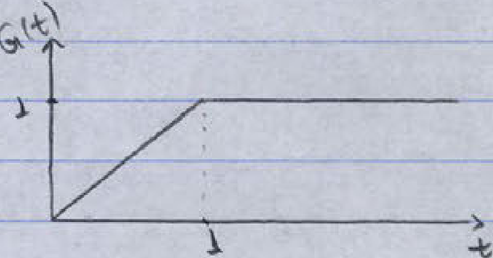
2) Άσκηση 1/Φυλλάδιο 6

$\{N(t)\}$ με $G(t)\sim Uniform([0,1])$

ν.δ.ο $M(t)=e^t-1$, $0\le t\le 1$.

Λύση

$$G(t)=\begin{cases} t & 0\le t\le 1 \\ 1 & t>1. \end{cases}$$



1η ιδέα. $M(t)=\sum_{n=1}^{\infty} G^{*(n)}(t) \to$ Δύσκολο για Ομοιόμορφη κατανομή.

2η ιδέα $\tilde{G}(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}dt=\int_0^1 e^{-st}dt=\frac{1-e^{-s}}{s}$.

$\tilde{M}(s)=\frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}=\frac{\frac{1-e^{-s}}{s}}{s-1+e^{-s}} \to$ Είναι δύσκολο να αντιστρέψουμε τον μετασχηματισμό.

3η ιδέα. $M(t)=G(t)+\int_0^t M(t-u)\,dG(u) \Longrightarrow M(t)=t+\int_0^t M(t-u)\,du$, $0\le t\le 1$.

$\overset{y=t-u}{\Longrightarrow} M(y)=t+\int_0^t M(y)\,dy \overset{d/dt}{\Longrightarrow} M'(t)=1+M(t)$ $0\le t\le 1$.

$$M'(t)-M(t)=1 \Rightarrow e^{-t}M'(t)-e^{-t}M(t)=e^{-t} \qquad 0\le t\le 1$$
$$\Rightarrow \tfrac{d}{dt}\left(e^{-t}M(t)\right)=e^{-t} \Rightarrow e^{-t}M(t)-e^{-0}M(0)=\int_0^t e^{-u}du$$
$$\Rightarrow e^{-t}M(t)=-e^{-t}+1 \Rightarrow M(t)=e^{t}-1 \quad 0\le t\le 1$$

3) Άσκηση 2/φυλλάδιο 6

$\{N(t)\}$ με $G(t)$ με σ.π.π. $g(t)=p\lambda e^{-\lambda t}+(1-p)\mu e^{-\mu t}$, $t\ge 0$

$M(t)=;$

Λύση (Την έχουμε ήδη κάνει).

$$\tilde{G}(s)=p\frac{\lambda}{\lambda+s}+(1-p)\frac{\mu}{\mu+s}$$

$$\tilde{M}(s)=\frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)}=\frac{p\lambda+((1-p)\mu)s+\lambda\mu}{s(s+(1-p)\lambda+p\mu)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+(1-p)\lambda+p\mu}$$

$$\Rightarrow M(t)=At+\frac{B}{(1-p)\lambda+p\mu}\cdot\left(1-e^{-[(1-p)\lambda+p\mu]}\right)$$

4) Άσκηση 3/φυλλάδιο 6

$\{N(t)\}$ με $G(t)\sim Gamma(r,\lambda)$, $M(t)=;$

Λύση

(Λύνεται με 1° κ' 2° τρόπο)

1η ιδέα. $G(t)\sim Erlang(r,\lambda)$

$\Downarrow$

$G^{*(n)}(t)\sim Erlang(nr,\lambda)$. $\rightarrow$ $\left[P(S_{nr}\le t)=P(\#\text{γγ στο } t\ge nr)\right]$ σ.δ. Poisson ρυθμού λ

$$G^{*(n)}(t)=\sum_{i=nr}^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}=1-\sum_{i=0}^{nr-1}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}$$

$$\Rightarrow M(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\sum_{i=0}^{nr-1}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!}\right)$$

2η ιδέα. $G(t)\Rightarrow \tilde{G}(s)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^r \Rightarrow \tilde{M}(s)=\dfrac{\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^r}{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^r}=\dfrac{\lambda^r}{(\lambda+s)^r-\lambda^r}$

Η αντιστροφή του μετασχ. είναι δύσκολη.

5) Άσκηση 4/ Φυλλάδιο 6

Μηχάνημα με Exp(λ) χρ. ζωής

Βλάβη ή ηλικία $T \to$ αντικατάσταση

Erlang(r,μ) χρ. αντικατάστασης.

$N(t) = \#$ μηχ. που έχουν χρησιμοποιηθεί ως τη στιγμή t.

α) $\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = ;$

β) Αν έχω κόστος αντικατάστασης C_p (προληπτικά), C_f (χάλασε)

$C(t) =$ Συνολικό κόστος αντικαταστάσεων μέχρι τη στιγμή t

$\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = ;$ Βέλτιστο $T = ;$

Λύση

Ανανεωτική διαδικασία → Γεγονότα ≡ αντικαταστάσεις.

$X_n =$ χρόνος μεταξύ $(n-1)$-οστής και n-οστής αντικατάστασης

$$G_1(t) = P(U_n \le t) = P(\min(\underset{Exp(\lambda)}{T_n}, T) \le t)$$

$$= \begin{cases} 1-e^{-\lambda t}, & 0 \le t < T \\ 1, & T \le t \end{cases}$$

$$\overbrace{\underset{Exp(\lambda)}{U_n = \min(T_n,T)} \quad \underset{Erlang(r,\mu)}{D_n}}^{X_n}$$

$X_n = U_n + D_n$, $U_n \sim G_1$, $D_n \sim G_2$

$$G_2(t) = 1 - \sum_{i=0}^{r-1} e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^i}{i!} \quad t \ge 0$$

Έχω
$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} \overset{ΘΜΑ}{=} \frac{1}{E[X_n]} = \frac{1}{E[U_n]+E[D_n]} = \frac{1}{\int_0^\infty (1-G_1(t))dt + \frac{r}{\mu}} =$$

$$= \frac{1}{\int_0^T e^{-\lambda t}dt + \frac{r}{\mu}} = \frac{1}{\frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda} + \frac{r}{\mu}}$$

$$C(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} \underset{\text{κόστος } i\text{-οστής αντικ.}}{C_i}, \quad X_n = U_n + D_n, \quad C_n = C_p P(T_n > T) + C_f P(T_n \le T)$$

$$(X_n, C_n) = (\min(T_n,T) + D_n, C_p P(T_n>T) + C_f P(T_n \le T))$$

$n \ge 1$ ανεξ. και ισόνομα

Άρα ΣΑΘΑ εφαρμόζεται $\to \lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C_n]}{E[X_n]} =$

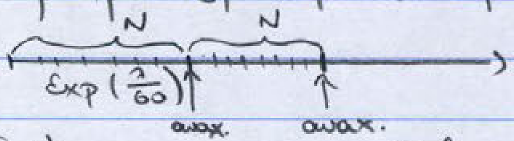
$E[X_n] = \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda} + \frac{r}{\mu}$.

$E[C_n] = C_p \cdot e^{-\lambda T} + C_f(1-e^{-\lambda T})$ άρα $\lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{C_p e^{-\lambda T} + C_f(1-e^{-\lambda T})}{\frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda} + \frac{r}{\mu}}$

6) Άσκηση 5/Φυλλάδιο 6.

Λεωφορ. που αναχωρεί όταν μαζευτούν N επιβάτες, φθάνουν με ρ.δ. Poisson (λ) ανά λεπτό $\equiv$ Poisson $\left(\frac{\lambda}{60}\right)$ ανά ώρα.

Μακροπρόθεσμος μέσος αριθμός αναχ. ανά ώρα.



Ενδιάμεσος χρόνος $\sim$ Erlang$\left(N, \frac{\lambda}{60}\right)$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[N(t)]}{t} = \frac{1}{E[\text{ενδ. χρόνος}]} = \frac{1}{\frac{N}{\lambda/60}} = \frac{\lambda}{60N}.$$

7) Άσκηση 1/Φυλλάδιο 7.

$\{N(t)\}$ ανανε. διαδικασία με κατανομή ενδ. χρόνων $G(t)$.

$E[X]=\mu$, $Var[X]=\sigma^2$, $M(t)=E[N(t)]$.

$\lim_{t\to\infty}\left(M(t)-\frac{t}{\mu}\right) = ;$

Λύση

$$H(t) = M(t) - \frac{t}{\mu} = \int_0^\infty E[N(t)|X_1=u]\,dG(u) - \frac{t}{\mu}$$

$$E[N(t)|X_1=u] = \begin{cases} 0 & u>t \\ 1+E[N(t-u)] & u\le t \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow H(t) = \int_0^t (1+M(t-u))\,dG(u) - \frac{t}{\mu} = \int_0^t \left(1+H(t-u)+\frac{t-u}{\mu}\right)dG(u) - \frac{t}{\mu}$$

$$= \int_0^t H(t-u)\,dG(u) + \underbrace{\boxed{\int_0^t \left(1+\frac{t-u}{\mu}\right)dG(u) - \frac{t}{\mu}}}_{=D(t)}$$

ανανε. εξίσωση $H(t)$.

Για το $\lim_{t\to\infty} H(t)$ θα εφαρμόσω το ΒΑΘ.

$$D(t) = \frac{t}{\mu}G(t) + \int_0^t \left(1-\frac{u}{\mu}\right)dG(u) - \frac{t}{\mu} = \int_0^t\left(1-\frac{u}{\mu}\right)dG(u) - \frac{t}{\mu}(1-G(t))$$

$$\Rightarrow D'(t) = \left(1-\cancel{\frac{t}{\mu}}\right)g(t) - \frac{1-G(t)}{\mu} + \cancel{\frac{t\,g(t)}{\mu}} = g(t) - \frac{1-G(t)}{\mu}$$

$$\Rightarrow D(t) = \int_0^t g(u)\,du - \int_0^t \frac{1-G(u)}{\mu}\,du = G(t) - \boxed{G_e(t)}$$

$\sim$ συνάρτηση ισορροπίας

Άρα η $D(t)$ είναι διαφορά θετικών, αυξουσών και φραγμένων.
Επίσης:

$$\int_0^{\infty} |D(t)|\,dt = \int_0^{\infty} |G(t) - G_e(t)|\,dt$$ λόγω * είναι πεπερασμένο.

* $G(t) - G_e(t) = (1 - G_e(t)) - (1 - G(t))$

20° Μάθημα 10/5/17.

Ανανεωτική Θεωρία - Ασκήσεις

1) Άσκηση 2/Φυλλάδιο 7.

$\{N(t)\}$ αναν. διαδικασία με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $G(t)$

$H(t)=E[N(t)(N(t)-1)]$, $t\geq 0$

Ανάν. εξίσωση $H(t)$ και λύση.

Λύση

X_1 ο χρόνος 1ου γεγονότος

$$H(t)=E[N(t)(N(t)-1)]=\int_0^\infty E[N(t)(N(t)-1)\mid X_1=u]\,dG(u).$$

$$\underbrace{E[N(t)(N(t)-1)\mid X_1=u]}_{f(N(t)),\ f(x)=x(x-1)}=\begin{cases}0 & u>t\\ \underbrace{E[(1+N(t-u))N(t-u)}_{\underbrace{E[(2+N(t-u)-1)\cdot N(t-u)]}_{2M(t-u)+H(t-u)}} & u\leq t.\end{cases}$$

$(N(t)\mid X_1=u)\overset{d}{=}1+N(t-u)\quad u\leq t$

$H(t-u)=E[N(t-u)(N(t-u)-1)]$

Άρα

$$H(t)=\int_0^t(2M(t-u)+H(t-u))\,dG(u)$$

$$=2\int_0^t M(t-u)\,dG(u)+\int_0^t H(t-u)\,dG(u).$$

$$D(t)=2\int_0^t M(t-u)\,dG(u)=2(M*G)(t)$$

Όμως η ανάν. εξίσωση για την ανάν. συνάρτηση είναι $M(t)=G(t)+\int_0^t M(t-u)\,dG(u)=G(t)+(M*G)(t)$

$\Rightarrow D(t)=2(M(t)-G(t))$

Η λύση της ανάν. εξίσωσης:

$$H(t)=D(t)+\int_0^t D(t-u)\,dM(u)=2(M(t)-G(t))+2\int_0^t(M(t-u)-G(t-u))\,dM(u)$$

$$=\cancel{2M(t)}-\cancel{2G(t)}+2(M*M)(t)-2\cancel{(G*M)}(t)$$

$$\Rightarrow E[N(t)(N(t)-1)]=2(M*M)(t).$$

2) Άσκηση 3 / Φυλλάδιο 7

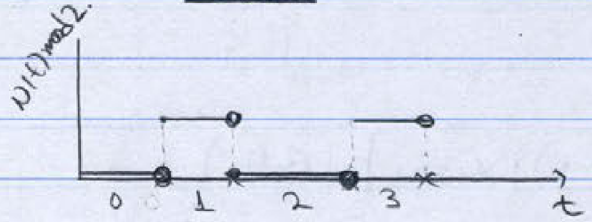
Έστω αναν. διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδ. χρόνων $G(t)$ και $H(t)=P(N(t)$ είναι περιττός$)$, $t\geq 0$.

α) Αναν. εξίσωση $H(t)$ - λύση.

β) Αν $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson ρυθμού $\lambda \Rightarrow H(t)=$;

γ) $\lim_{t\to\infty} H(t)$

Λύση



Έστω $X_1, X_2, \ldots \sim G(t)$ ενδ. χρόνοι.

Αν δεσμεύσω στο X_1, $H(t)=P(N(t)$ περιττός$)$

$$= \int_0^\infty P(N(t) \text{ περιττός} \mid X_1=u)\, dG(u)$$

$$P(N(t) \text{ περιττός} \mid X_1=u) = \begin{cases} 0 & u>t \\ P(N(t-u) \text{ άρτιος}) = 1-H(t-u) & u\leq t \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(t)=\int_0^t dG(u) - \int_0^t H(t-u)\, dG(u)$$

<u>ΔΕΝ</u> είναι αναν. εξίσωση.

Η "σωστή" αναν. διαδικασία για να πάρω αναν. εξίσωση έχει χρ. γεγονότων: $S_1 = X_1+X_2$

$$S_2 = X_1+X_2+X_3+X_4$$

Τότε $H(t)=P(N(t)$ περιττός$) = \int_0^\infty P(N(t) \text{ περιττός} \mid S_1=u)\, dG_{S_1}(u)$.

$$P(N(t) \text{ περιττός} \mid S_1=u) = \begin{cases} P(X_1\leq t \mid X_1+X_2=u) & u>t \\ H(t-u) & u\leq t \end{cases}$$

$$H(t)=\underbrace{\int_t^\infty P(X_1\leq t \mid X_1+X_2=u)\, dG^{*2}(u)}_{=} + \int_0^t H(t-u)\, dG(u).$$

$$D(t)=P(X_1\leq t, X_1+X_2>t) = P(X_1 \leq t < X_1+X_2) =$$

$$= P(X_1\leq t) - P(X_1+X_2\leq t) = G(t)-G^{*2}(t)$$

Έχουμε $H(t)=G(t)-G^{*2}(t)+\int_0^t H(t-u)\, dG(u)$.

$$\Rightarrow H(t)=D(t)+\int_0^t D(t-u)\, dM_{G^{*2}}(u).$$

β) $P(N(t)$ περιττός$)$ με ανάλογη. στο 1 και στο -1 κλπ.
αλλιώς:
$$D(t) = (1-e^{-\lambda t}) - (1-e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}) = \lambda t e^{-\lambda t}$$
Η $M_{G^{*2}}(t)$ είναι η ανάν. συνάρτηση που αντιστοιχεί σε Erlang$(2,\lambda)$
$$\tilde{M}_{G^{*2}}(s) = \frac{\tilde{G}^{*2}(s)}{1-\tilde{G}^{*2}(s)} = \ldots \Rightarrow M_{G^{*2}}(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}(1-e^{-2\lambda t})$$
άρα $H(t) = \lambda t e^{-\lambda t} + \int_0^t \lambda(t-u)e^{-\lambda(t-u)}\left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}e^{-2\lambda u}\right)du$

γ) $H(t) = D(t) + \int_0^t H(t-u)\,dG(u)$
$$D(t) = G(t) - G^{*2}(t) = \underbrace{(1-G^{*2}(t))}_{\geq 0,\ \text{φραγμ.}} - \underbrace{(1-G(t))}_{\geq 0,\ \text{φραγμ.}}$$
και $\int_0^\infty |D(t)|\,dt \leq \int_0^\infty (1-G^{*2}(t))\,dt + \int_0^\infty (1-G(t))\,dt = 3\mu < \infty$
$\mu = E[X_1]$
Άρα το ΒΑΘ είναι εφαρμόσιμο $\Rightarrow \lim_{t\to\infty} H(t) = \dfrac{\int_0^\infty D(t)\,dt}{E[S_1]}$
$$= \frac{\int_0^\infty (1-G^{*2}(t))\,dt - \int_0^\infty (1-G(t))\,dt}{E[S_1]} = \frac{2\mu - \mu}{2\mu} = \frac{1}{2}.$$

3) Άσκηση 4 / Φυλλάδιο 7
$\{N(t)\}$ ανάν. διαδικασία με σ.κ. ενδιάμεσων χρόνων $X_n \sim G(t)$
$E[X_n^r] = \mu_r' < \infty$, $r \geq 1$
$A(t) = t - S_{N(t)}$
$B(t) = S_{N(t)+1} - t$
$H(t) = E[A(t)B(t)]$, $t \geq 0$

$$\left\{\begin{array}{l} (A(t)\mid X_1 = u) \overset{d}{=} A(t-u) \\ (B(t)\mid X_1=u) \overset{d}{=} B(t-u) \end{array}\right. \quad u<t$$

α) ανάν. εξίσωση για την $H(t)$
β) $\lim_{t\to\infty} H(t)$

Λύση

Έστω $S_1 = X_1$ χρόνος $1^{ου}$ γεγονότος.
$H(t) = \int_0^\infty E[A(t)B(t)\mid S_1 = u]\,dG(u)$
$$E[A(t)B(t)\mid S_1=u] = \begin{cases} t(u-t) & u>t \\ H(t-u) & u\leq t. \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(t) = \int_t^{\infty} t(u-t)\,dG(u) + \int_0^t H(t-u)\,dG(u)$$

Εφαρμόζω ΒΑΘ οπότε:

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{\int_0^{\infty} D(t)\,dt}{\mu_1'}$$

$$\int_0^{\infty} D(t)\,dt = \int_0^{\infty}\int_t^{\infty} t(u-t)\,dG(u)\,dt \xlongequal{0<t<u<\infty} \int_0^{\infty}\int_0^{u} t(u-t)\,dt\,dG(u)$$

$$= \int_0^{\infty}\left[\frac{ut^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^u dG(u) = \int_0^{\infty}\frac{u^3}{6}\,dG(u) = \frac{1}{6}\mu_3'$$

$$\Longrightarrow \lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{\mu_3'}{6\mu_1'}$$

4) Ανανεωτικό Θεώρημα Blackwell

$\{N(t)\}$ αναν. διαδικασία με αναν. συνάρτηση $M(t) = E[N(t)]$ και μέσου ενδ. χρόνου $\mu < \infty$, συνεχή κατανομή ενδ. χρόνων τότε $\lim_{t\to\infty}(M(t) - M(t-h)) \underset{\forall h}{=} \frac{h}{\mu}$.

Απόδειξη

Έστω $H(t) = M(t) - M(t-h) \quad t \geq h$

$$= \int_{t-h}^{t} dM(u)$$

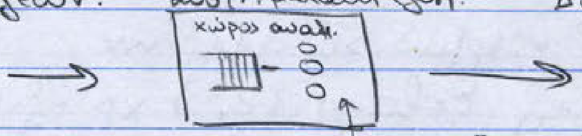
Πρέπει να ορίσω $D(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < h \\ 0 & t \geq h \end{cases}$

Έχω τις προϋποθέσεις του ΒΑΘ (φθίνουσα, θετική, φραγμένη) και $\int_0^{\infty} |D(t)|\,dt = \int_0^{\infty} D(t)\,dt = \int_0^{h} dt = h$.

$$\overset{\text{ΒΑΘ}}{\Longrightarrow} \lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{\int_0^{\infty} D(t)\,dt}{\mu} = \frac{h}{\mu}.$$

21° Μάθημα 12/5/17
Εισαγωγή στις Ουρές Αναμονής

1) Πλαίσιο
Σύστημα εξυπηρέτησης - Ουρά (Queueing system)
Σύστημα εισόδου - εξόδου, διακριτών μονάδων, στοχαστ. χαρακτήρα.
Διαδικασία αφίξεων. Σύστ./Μηχανή εξυπ. Διαδ. αποχωρήσεων.



2) Ονοματολογία / Συμβολισμός Kendall
Erlang (1909) → Αρχή Θ. Ουρών
Kendall → Ονοματολογία

A / B / c / k ( )

A → διαδικασία αφίξεων
B → χρόνοι εξυπηρέτησης
c → αριθμός παράλληλων υπηρετών
k → χωρητικότητα (# πελ σε εξυπηρέτηση + αναμονή)
( ) → πειθαρχία ουράς

A: M (Markovian/Memoryless) σημαίνει Poisson διαδ. αφίξεων.
D (Deterministic) σταθεροί ενδιάμεσοι χρόνοι
GI ή G (General Independent) ανανεωτική διαδικασία.
E_k (Erlang-k) Ανανε. διαδ. αφίξεων (k,)
Άλλα: H_k, PH, κλπ.
B: ομοίως.

Πειθαρχία: FCFS (first-come-first-served) ≡ FIFO (first in first out).
LCFS (last come last served) ≡ LIFO (last in first out).
SSTF (Shortest service time first).
SIRO (Service in random order).

Αν παραλείπονται η χωρητικότητα και η πειθαρχία θεωρείται άπειρη χωρητικότητα και πειθαρχία FCFS.

3) Παράδειγμα.

M/GI/1 → Poisson διαδ. αφίξεων
Γενικοί ανεξ. χρόνοι εξυπ.
1 υπηρέτης, άπειρη χωρητικότητα.
FCFS πειθαρχία.

D/E2/1/8 (SIRO) → Ντετερμ. διαδ. αφίξεων
Ανεξ. Erlang (2,) χρ. εξυπ.
1 υπηρέτης, 7 θέσεις αναμονής
Service in random order.

4) Δεδομένα συστ. εξυπ.

Τύπος κατά Kendall.

Κατανομή ενδ. χρόνων αφίξεων. } εναλλακτικά
Κατανομή χρόνων εξυπ.

εναλλ.

a: Μέσος ενδ. χρόνος αφίξεων
$\lambda = \frac{1}{a}$ Ρυθμός αφίξεων

b = Μέσος χρ. εξυπηρέτησης
$\mu = \frac{1}{b}$ Ρυθμός εξυπ.

5) Οι 3 οπτικές

- Διαχειριστής
- Πελάτες.
- Υπηρέτες.

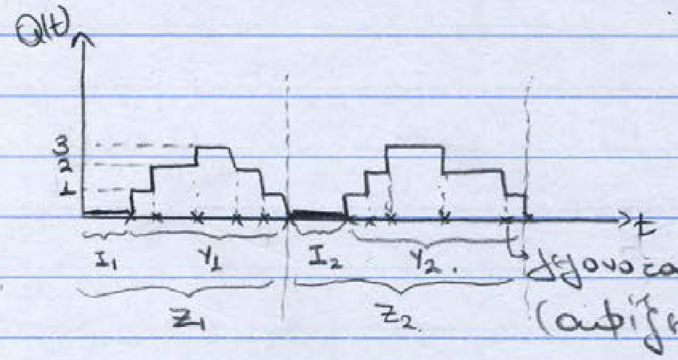
6) Μέτρα Απόδοσης

$Q(t)$ = # πελ. τη στιγμή t
$Q_q(t)$ = # πελ. -"- σε αναμονή
$Q_s(t)$ = # πελ -"- σε εξυπηρέτηση.

} Μέτρα που αφορούν τον διαχειριστή

S_n = χρόνος παραμονής n-οστού πελάτη
W_n = -״- αναμονής -״-
X_n = -״- εξυπηρέτησης -״-
} μέτρα που αφορούν τον πελάτη.

A_n (arrival) = χρόνος άφιξης n-οστού πελάτη.
D_n (departure) = -״- αποχώρησης -״-
$S_n = D_n - A_n$
$Q_n^- = Q(A_n^-)$ = #πελ που βρίσκει η n-οστή άφιξη.
$Q_n^+ = Q(D_n^+)$ = #πελ. που αφήνει η n-οστή αναχώρηση.
Z_n = διάρκεια n-οστού κύκλου λειτουργίας
(από τη στιγμή αποχώρησης που αφήνει το σύστημα κενό μέχρι την επόμενη τέτοια στιγμή).
I_n = περίοδος n-οστής αργίας
Y_n = περίοδος n-οστής λειτουργίας.



γεγονότα που συμβαίνουν στο σύστημα.
(αφίξεις/αναχωρήσεις)

7) Οριακή κατανομή αριθμού πελατών

Διαίσθηση: Πιθ. j πελάτες στο σύστημα μια τυχαία χρ. στιγμή

$P_j = \lim_{t\to\infty} P(Q(t)=j) \leftarrow$ Οριακή πιθανότητα #πελ $= j$

$= \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t 1\{Q(u)=j\}\,du}{t}$ Μακρ. ποσοστό χρόνου με #πελ $= j$

$= \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t P(Q(u)=j)\,du}{t}$ οριακή πιθανότητα #πελ. $= j$ αν η στιγμή επιλεγεί ομοιόμορφα.

(Έστω $T \sim Unif([0,t])$, $\lim_{t\to\infty} P(Q(T)=j) = \lim_{t\to\infty} \int_0^\infty P(Q(T)=j \mid T=u) f_T(u)\,du$
$= \lim_{t\to\infty} \int_0^t P(Q(u)=j)\cdot \frac{1}{t}\,du$

Υπό την προϋπόθεση η $\{Q(t)\}$ αναγεν. διαδικασία.

8) Οριακός μέσος αριθμός πελατών

Διαίσθηση: Μέσος # πελ. σε τυχαία χρ. στιγμή.

$$E[Q] = \sum_{j=0}^{\infty} j p_j =$$

$$= \lim_{t\to\infty} E[Q(t)] = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t Q(u)du}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t E[Q(u)]du}{t}$$

9) Οριακή κατανομή χρόνου παραμονής

Διαίσθηση: πιθ ένας τυχαίος πελάτης να έχει χρόνο παραμονής $\le x$.

$$F_S(x) = P(S \le x) = \lim_{n\to\infty} P(S_n \le x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} 1\{S_n \le x\}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} P(S_n \le x)}{n}$$

10) Οριακός Μέσος χρόνος παραμονής

$$E[S] = \int_0^{\infty} x\, dF_S(x) = \lim_{n\to\infty} E[S_n] = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} P(S_n \le x)}{n}$$