ΣΜΕΕ 19/5/2017

Ουρές Αναμονής - Βασικά αποτελέσματα

① $A_1 < A_2 < A_3 < \dots$ στιγμές αφίξεων πελατών

$D_1 < D_2 < D_3 < \dots$ —//— αναχωρήσεων —//—

$$a_n = P[Q^- = n] = \lim_{k\to\infty} P[Q(A_k^-) = n] = \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{k} 1\{Q(A_k^-)=n\}}{k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{k} P[Q(A_k^-)=n]}{k}$$

$!$ $\lim_{k\to\infty} a_k = \ell \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{k} a_i}{k} = \ell$ C-lim

και $d_n = P[Q^+ = n] = \lim_{k\to\infty} P[Q(D_k^+) = n]$

Ερμηνείες:

p_n: πιθ n πελάτες σε τυχαίο χρόνο (τυχαία χρονική στιγμή) } οπτική διαχειριστή

a_n: πιθ n πελάτες σε στιγμή άφιξης (μόλις πριν)

d_n: πιθ n πελάτες σε στιγμή αναχώρησης (αμέσως μετά) } οπτική του πελάτη

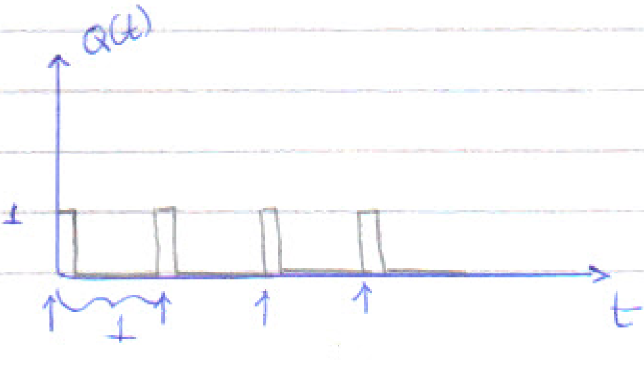
② $(p_n) \neq (a_n) \neq (d_n)$

D/D/1 σταθεροί ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων $= a$

σταθεροί χρόνοι εξυπηρέτησης $= b$

Ευστάθεια $\Leftrightarrow b \leq a$

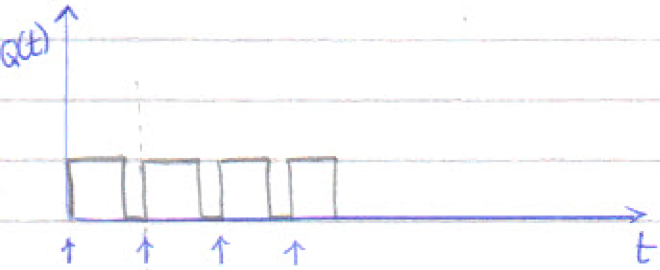
Παρ 1: $a = 1$, $b = 0.1$



$$p_n = \begin{cases} 0{,}9 & , n=0 \\ 0{,}1 & , n=1 \\ 0 & , n\geq 2 \end{cases}$$

$$a_n = \begin{cases} 1 & , n=0 \\ 0 & , n\geq 1 \end{cases}$$

Παρ. 2 : $a=1$, $b=0.9$



$$p_n = \begin{cases} 0{,}1 & , n=0 \\ 0{,}9 & , n=1 \\ 0 & , n\geq 2 \end{cases}$$

$$a_n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & , n\geq 1 \end{cases}$$

③ Βασικά αποτελέσματα

1] Χαρακτηρισμός Ευστάθειας για GI/GI/c συστήματα

2] Νόμος του Little

3] Ιδιότητα μεμονωμένων μεταβάσεων

4] Ιδιότητα PASTA

④ Χαρακτηριςμός Ευστάθειας

Σύστημα και $\lambda = \frac{1}{a}$, a : μέσος χρόνος αφίξεων

λ = ρυθμός αφίξεων (πελ. / χρονική μονάδα)

b = μέσος χρόνος εξυπηρέτησης

$\rho = \lambda b$: ρυθμός / ένταση συνωστισμού

"ποσότητα έργου προς διεκπεραίωση"

= μέσο ποσό έργου που φτάνει στο σύστημα ανά χρονική μονάδα

Θεώρημα: Για την $GI/G/c$ με συνάρτηση κατανομής ενδιάμεσων χρόνων ή συνάρτηση κατανομής χρόνων εξυπηρέτησης ή και οι δύο όχι ντετερμινιστικές (όχι $D/D/c$) και με συνεχές μέρος ισχύει

1] $\rho < c \Rightarrow$ Ευστάθεια $\exists (p_n), (a_n), (d_n)$ με $p_n > 0$, $a_n > 0$, $b_n > 0$ και $\sum_n p_n = \sum_n a_n = \sum_n d_n = 1$

2] $\rho \geq c \Rightarrow$ Αστάθεια $p_n = a_n = d_n = 0$

Η $D/D/c$ είναι ασταθής και για $\rho = c$.

⑤ Νόμος του Little (1962)

$$\text{Ο μέσος αριθμός πελατών} = E[Q] = \underbrace{\lambda}_{\text{ρυθμός των αφίξεων}} \times \underbrace{E[S]}_{E[\text{χρόνος παραμονής πελάτη}]}$$

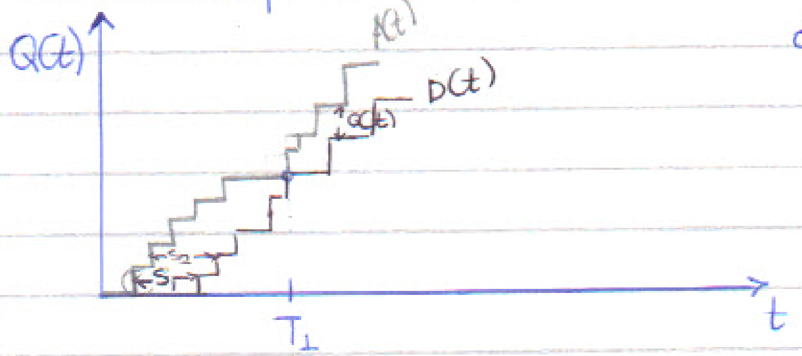
Ιδέες απόδειξης:

1η (οικονομική): Έστω ότι κάθε πελάτης δίνει μια χρηματική μονάδα στο διαχειριστή ανά χρονική μονάδα παραμονής του. μακροπρόθεσμο μέσο κέρδος διαχειριστή / χρονική μονάδα ίδιο είτε οι πελάτες δίνουν 1 χρημ. μονάδα κάθε χρον. μονάδα είτε δίνουν όλες τις χρημ. μονάδες με την άφιξή τους πληρωμή ανά χρον. μονάδα — πληρωμή ανά άφιξη

$$E[Q] = \lambda \cdot E[S]$$

"πόσοι θα μπαίνανε ανά χρ μονάδα"

2η (αυστ. θεωρία)



όπου:

$Q(t)$ πλήθος πελατών τη στιγμή t

$A(t)$ πλήθος αφίξεων μέχρι t

$D(t)$ πλήθος αναχωρήσεων μέχρι t

$S_1, S_2, \dots$ οι χρόνοι παραμονής των πελατών

$T_1, T_2, \dots$ οι χρόνοι έναρξης κύκλων αναγέννησης

$$E[Q] = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t Q(u)\,du}{t} = \lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{T_n} Q(u)\,du}{T_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{A(T_n)} S_i}{T_n} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{A(T_n)}{T_n}}_{\lambda} \; \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{A(T_n)} S_i}{A(T_n)}}_{E[S]}$$

⑥ Ιδιότητα μεμονωμένων μεταβάσεων

Μεμονωμένες αφίξεις και μεμονωμένες αναχωρήσεις $\Longrightarrow a_n = d_n \quad \forall n$

ποσοστό πελατών που βρίσκουν n μπαίνοντας — ποσοστό πελατών που αφήνουν n βγαίνοντας

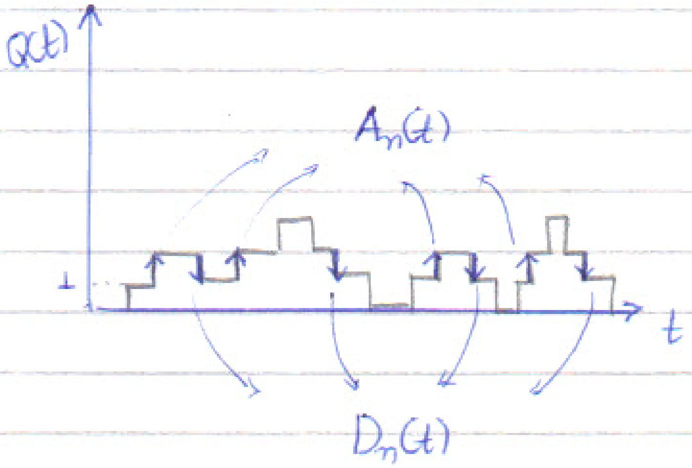
$$a_n = \lim_{t\to\infty} \frac{A_n(t)}{A(t)}$$

$A(t) = \#$ αφίξεων στο $(0,t]$

$A_n(t) = \#$ ——"—— που βρίσκουν n πελάτες

Ομοίως, $d_n = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{D_n(t)}{D(t)}$

$D(t) = \#$ αναχωρήσεων στο $(0,t]$
$D_n(t) = \#$ ——————//—————— και αφήνει n πελάτες



« βγαίνει από τη κατάσταση n στη $n+1$ »

Είναι $A_n(t) - D_n(t) = 0$ ή 1

Οπότε $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{A_n(t)}{t} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{D_n(t)}{t}$. Επίσης, $\underbrace{\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{A(t)}{t}}_{\text{ρυθμός αφίξεων}} = \underbrace{\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{D(t)}{t}}_{\text{ρυθμός αναχωρήσεων}}$

και διαιρώ κατά μέλη: $a_n = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{A_n(t)}{A(t)} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\frac{A_n(t)}{t}}{\frac{A(t)}{t}} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\frac{D_n(t)}{t}}{\frac{D(t)}{t}} =$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{D_n(t)}{D(t)} = d_n$$

⑦ Ιδιότητα PASTA (: Poisson Arrivals See Time Averages)

Αν η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson $\Longrightarrow p_n = a_n$ (Wolf 1982)

Ιδέα:

$A(t,s) = \#$ αφίξεων στο $(t,s]$, $t<s$

$$a_n = \lim_{t\to\infty} \lim_{h\to 0} P\big(Q(t)=n \mid A(t,t+h)>0\big) = \lim_{t\to\infty} \lim_{h\to 0} \frac{P(Q(t)=n)\,\cancel{P(A(t,t+h)>0 \mid Q(t)=n)}}{\cancel{P(A(t,t+h)>0)}}$$

αμνήμον ιδιότ. Poisson

$$= \lim_{t\to\infty} P(Q(t)=n)$$

ΣΜΕΕ 26/5/2017

Εφαρμογές βασικών αποτελεσμάτων στην ανάλυση απόδοσης

① Βασικές ποσότητες

- λ: ρυθμός αφίξεων
- b: μέσος χρόνος εξυπηρέτησης
- Q: # πελατών
- S: χρόνος παραμονής
- $\rho=\lambda b$: ρυθμός συνωστισμού
- p_n $P($n πελάτες σε τυχαία χρονική στιγμή$)$
- a_n: $P($ μπαίνοντας$)$
- d_n: $P($ βγαίνοντας$)$

② Βασικά αποτελέσματα

1] Χαρακτηρισμός ευστάθειας σε $GI/GI/c$: Ευστάθεια $\Leftrightarrow$ $\rho<c$

2] Νόμος του Little: $E[Q]=\lambda E[S]$

3] Ιδιότητα μεμονωμένων αφίξεων/αναχωρήσεων $\Rightarrow a_n=d_n$ $\forall n$ $(Q^- \overset{d}{=} Q^+)$

4] PASTA: Poisson αφίξεις $\Rightarrow a_n=p_n$ $\forall n$ $(Q^- \overset{d}{=} Q)$

sos με άλλα νούμερα

③ $M/M/1$ άρα

Poisson(λ) διαδικασία αφίξεων / Exp(μ) χρόνος εξυπηρέτησης / 1 υπηρέτης / / ∞ χωρητικότητα / FCFS

$E[Q]=;$ $E[S]=;$ $p_n=;$ $a_n=;$ $d_n=;$

$\tilde{F}(s) \longrightarrow F_S(x)$ (κατανομή του S;)

$E[I]$, $E[Y]$, $E[Z]$

αργία, συνεχής απασχόλησης, κύκλος απασχόλησης

Ευστάθεια: $\frac{\lambda}{\mu}<1$

$\lambda b=\rho<1$

Για τα $E[Q]$, $E[S]$ δημιουργώ σύστημα 2 εξισώσεων

1^{η} εξίσωση: Νόμος του Little: $E[Q]=\lambda E[S]$

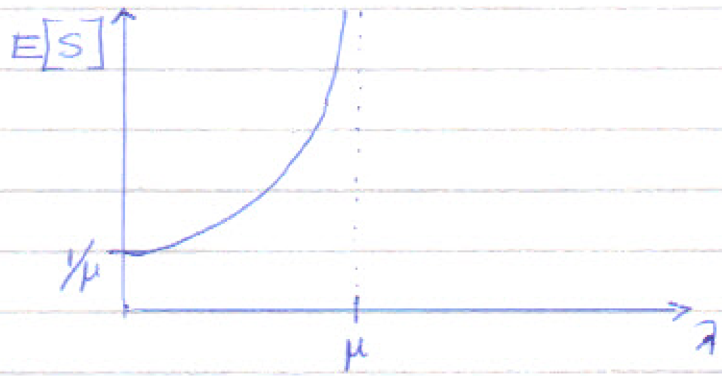
2^{η} Υπολογίζω το $E[S]$ δεσμεύοντας στον αριθμό Q^- των πελατών που βρίσκει κατά την άφιξή του

$$E[S]=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{P[Q^-=n]}_{a_n}\,\underbrace{E[S\mid Q^-=n]}_{\frac{n+1}{\mu}}=E\left[\frac{Q^-+1}{\mu}\right]=\frac{1}{\mu}\left(E[Q^-]+1\right)$$

$$\overset{PASTA}{=}\frac{1}{\mu}\left(E[Q]+1\right)$$

Άρα,
$$\left.\begin{aligned}E[Q]&=\lambda E[S]\\ E[S]&=\frac{1}{\mu}\left(E[Q]+1\right)\end{aligned}\right\}\Longrightarrow E[Q]=\rho\left(E[Q]+1\right)$$

$$\Longrightarrow E[Q]=\frac{\rho}{1-\rho}\quad \text{και}\quad E[S]=\frac{1}{\lambda}E[Q]=\frac{1}{\mu(1-\rho)}=\frac{1}{\mu-\lambda}$$



για λ κοντά στο μ υπάρχει πρόβλημα

Προσδιορισμός των p_n: $p_n=$ ποσοστό του χρόνου που υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα (μακροπρόθεσμα)

$\lambda p_n=$ ρυθμός αφίξεων που βρίσκουν n πελάτες $\quad n\to n+1$

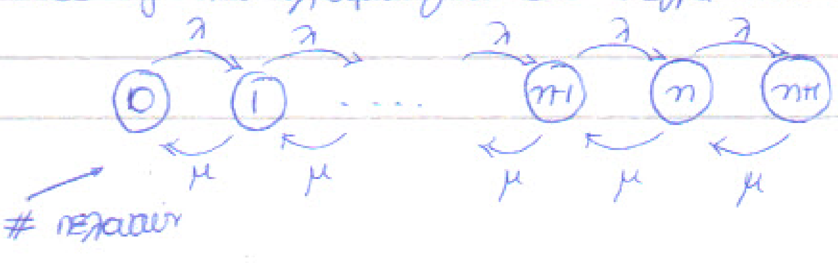
$\mu p_n=$ —"— αναχωρήσεων που αφήνουν $(n-1)$ πελάτες $\quad n\to n-1$

Παράσταση του συστήματος με την ιδέα του δείκτη

Σύστημα $\longleftrightarrow$ σειρά κελιών, ένα για κάθε κατάσταση του Q

Δείκτης μετακινείται από κελί σε κελί σύμφωνα με την εξέλιξη του συστήματος. Βλέπω το δείκτη σαν πελάτη που μπαίνει στο δίκτυο

συσ. εξ. που σχηματίζουν τα κελιά και εφαρμόζω το N. Little στο κελί n.



$$E[Q_n] = \lambda_n E[S_n] \Longrightarrow p_n = (\lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1}) \frac{1}{\lambda+\mu} \quad \text{όταν } n \geq 1$$

$$p_0 = \mu p_1 \frac{1}{\lambda} \qquad n=0$$

$$\Longrightarrow \lambda p_0 = \mu p_1$$
$$(\lambda+\mu) p_n = \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} \quad , n \geq 1$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda p_0 &= \mu p_1 \\ (\lambda+\mu) p_1 &= \cancel{\lambda p_0} + \mu p_2 \\ (\lambda+\mu) p_2 &= \cancel{\lambda p_1} + \mu p_3 \\ (\lambda+\mu) p_3 &= \cancel{\lambda p_2} + \mu p_4 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \lambda p_{n-1} = \mu p_n \quad , n \geq 1$$

$$\Longrightarrow p_n = \rho\, p_{n-1} \qquad n \geq 1$$
$$\Longrightarrow p_n = \rho^n p_0 \qquad n \geq 1$$

$$\rho < 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \Longrightarrow p_0 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n}_{\frac{1}{1-\rho}} = 1$$

$$\Longrightarrow p_0 = 1-\rho$$

Άρα, $p_n = (1-\rho)\rho^n$

Επομένως, $d_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{μεμονωμένων} \\ \text{μεταβάσεων}}}{=} a_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{PASTA}}}{=} p_n$

$$\tilde{F}_S(s) = E\left[e^{-sS_\bullet}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P\left[Q^- = n\right] E\left[e^{-sS} \mid Q^- = n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \underset{\substack{\| \\ (1-\rho)\rho^n}}{a_n} \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^{n+1}$$

$$\overset{(1-\rho)\frac{\mu}{\mu+s}}{=} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho\mu}{\mu+s}\right)^n}_{\frac{1}{1-\frac{\rho\mu}{\mu+s}}} = \frac{(1-\rho)\mu}{s+(1-\rho)\mu} \quad \text{μετασχ. L-S } Exp(\mu(1-\rho))$$

$$\Longrightarrow S \sim Exp(\mu(1-\rho)) \quad \text{και} \quad F_S(x) = 1 - e^{-\mu(1-\rho)x}, \quad x > 0$$

Μελέτη του κύκλου απασχόλησης:

$E[I] = E[$υπολειπόμενος χρόνος ως την επόμενη άφιξη$] = \frac{1}{\lambda}$

ΣΑΘΑ: Μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που ο υπηρέτης είναι απασχολημένος $= \dfrac{E[\text{αμοιβή σε 1 κύκλο}]}{E[\text{μήκος κύκλου}]} = \dfrac{E[Y]}{E[Z]}$

αμοιβή (1) $\longrightarrow$ απασχόληση

(0) $\longrightarrow$ αργία

$$1 - p_0 = \frac{E[Y]}{E[Z]}$$

Όμως, $p_0 = 1-\rho$. $\quad E[Y] = E[Z] - E[I] = E[Z] - \frac{1}{\lambda}$

$$\Rightarrow \rho = 1 - \frac{1}{\lambda E[Z]} \Rightarrow E[Z] = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}$$

και $E[Y] = \dfrac{1}{\lambda(1-\rho)} - \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \dfrac{1}{\mu(1-\rho)}$

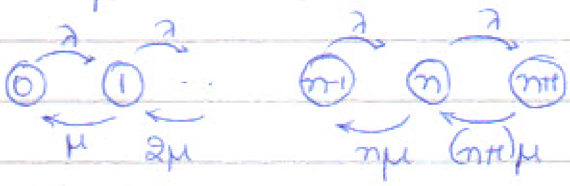
④ M/M/∞ ουρά

$\lambda \to$ ρυθμός αφίξεων, $\mu \to$ ρυθμός εξυπηρέτησης, $\rho \to$ ρυθμός [illegible]

Ευστάθεια πάντα

$E[Q] \to$

$E[S] = \frac{1}{\mu}$ $\Big\}$ Άρα $E[Q] = \lambda E[S] = \lambda \frac{1}{\mu} = \rho$



Μέθοδος δαίμονα:

$$\left.\begin{array}{l} p_0 = \mu p_1 \cdot \frac{1}{\lambda} \\ p_n = \left(\lambda p_{n-1} + (n+1)\mu\, p_{n+1}\right)\cdot \frac{1}{\lambda + n\mu}, \quad n \geq 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ (\lambda + n\mu)p_n = \lambda p_{n-1} + (n+1)\mu\, p_{n+1} \end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lambda p_0 = \mu p_1 \\ &(\lambda+\mu)p_1 = \lambda p_0 + 2\mu p_2 \\ &(\lambda+\mu)p_2 = \lambda p_1 + 3\mu p_3 \\ &\vdots \\ &n\mu p_n = \lambda p_{n-1}, \quad n\geq 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow p_n = \frac{\lambda}{n\mu} p_{n-1} = \frac{\rho}{n} p_{n-1}, \quad n\geq 1$$

$$\Rightarrow p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0, \quad n\geq 1$$

Επιπλέον: $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \Rightarrow p_0 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!}}_{e^{\rho}} = 1 \Rightarrow p_0 = e^{-\rho}$

$$\Rightarrow p_n = e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!}, \quad n\geq 0$$

$$\frac{E[I] = \frac{1}{\lambda}}{E[Z]} = p_0 = e^{-\rho} \Longrightarrow E[Z] = \frac{e^{\rho}}{\lambda}$$

⑤ Γενικές Συνέπειες του Νόμου Little

1] Εφαρμογή του N. Little στο χώρο αναμονής $E[Q_q] = \lambda E[W]$

Q_q: # πελατών σε αναμονή, W: χρόνος αναμονής

2] Εφαρμογή του N. Little στο χώρο εξυπηρέτησης: $E[Q_s] = \lambda E[X] = \lambda b = \rho$

Q_s: # πελατών στο χώρο εξυπηρέτησης = μέσος αριθμός απασχολημένων υπηρετών; $E[X]$ = μέσος χρόνος εξυπηρέτησης

Αν το σύστημα έχει c υπηρέτες: ρ = Μέσος αριθμός απασχολημένων υπηρετών $= E\left[\sum_{i=1}^{c} I_i\right]$

$I_i = \begin{cases} 1, & \text{αν ο } i \text{ υπηρέτης απασχ.} \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$

$\frac{\text{όμοιοι}}{\text{υπηρέτες}}$ c P(απασχολημένος υπηρέτης)

GI/GI/c ⇒ P(απασχ. υπηρέτη) = ποσοστό χρόνου που ένας υπηρέτης είναι απασχολημένος $= \frac{\rho}{c}$

Για c=1, GI/GI/1 ⇒ $1-p_0 = \rho \Rightarrow p_0 = 1-\rho$

ΣΜΕΕ 31/5/2017

Ασκήσεις στις Ουρές Αναμονής

Σε GI/GI/c :

Ποσοστό χρόνου απασχ. υπηρέτη $= \frac{\rho}{c}$

$E[\#$ απασχ. υπηρετών$] = \rho$

Σε GI/GI/1 : $p_0 = 1-\rho$

② Ασκ. 2 / Φυλ. 8

M/GI/1/1 με λ: ρυθμός αφίξεων και b: μέσος χρόνος εξυπηρέτησης

$p_0 = ;$ $p_1 = ;$ $\mu = \frac{1}{b}$

Εφαρμόζω τη μέθοδο του δείκτη στο σύστημα 1:

Θ. Little : $E[Q_1] = \underbrace{\lambda_1} E[S_1]$

$p_1 = \lambda p_0 \cdot b$

$p_1 = \rho p_0$

και $p_0 + p_1 = 1 \Longrightarrow p_0 = \frac{1}{1+\rho}$ και $p_1 = \frac{\rho}{1+\rho}$

(Επειδή έχω περιορισμένη χωρητικότητα $\Rightarrow$ ευστάθεια)

③ Ασκ. 3 / Φυλ. 8

GI/GI/∞ με a: μέσος ενδιάμεσος χρόνος αφίξεων, $\lambda = \frac{1}{a}$

b: ——— // ——— εξυπηρέτησης, $\mu = \frac{1}{b}$

$E[Q] = ;$

Από N. Little, $E[Q] = \lambda E[S] \Longrightarrow E[Q] = \frac{1}{a} b = \rho$

Στην ειδική περίπτωση του M/M/∞ : $E[Q] = \rho$

④ Ασκ 3/ Φυλ. 8

M/M/c ουρά

ρυθμός αφίξεων 5 πελ./ώρα , μέσος χρόνος εξυπ. πελατών 78'

α) min c ώστε ευστάθεια

β) min c ώστε ποσοστό απασχ. υπηρ. ≤ 80%

Έστω ως μονάδα του χρόνου η ώρα

$\lambda = 5$, $b = 1{,}3$

α) $\rho = 5 \cdot 1{,}3 = 6{,}5 < c \Rightarrow \min c = 7$

β) $\dfrac{\rho}{c} \leq 0.8 \Rightarrow c \geq \dfrac{6{,}5}{0{,}8} \Rightarrow \min c = 9$

⑤ Ασκ. 4/ Φυλ. 8

M/GI/1   λ: ρυθμός αφίξεων

b: μέσος χρόνος εξυπηρέτησης

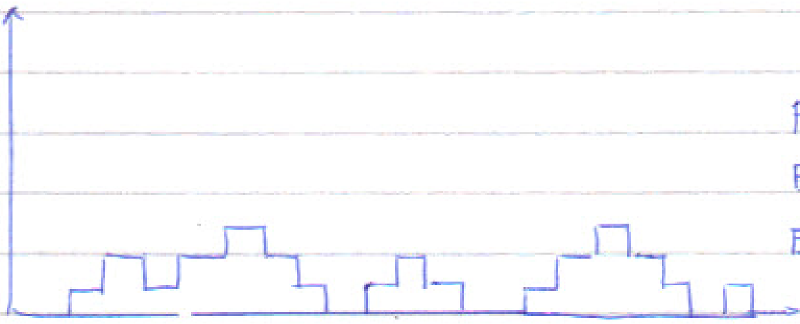
σ: τυπική απόκλιση του χρόνου εξυπηρέτησης

$E[Q] = ;$

N. Little $E[Q] = \lambda E[S]$

Υπολογισμός του $E[S]$ δεσμεύοντας ως προς Q^-

$$E[S] = \sum_{n=0}^{\infty} P(Q^- = n)\, E[S \mid Q^- = n] = P[Q^- = 0]\, E[S \mid Q^- = 0] + P[Q^- > 0]\, E[S \mid Q^- > 0]$$



$P[Q^- = 0] = P[Q = 0] = p_0 = 1 - \rho$

$E[Q^- > 0] = \rho$

$E[S \mid Q = 0] = b$

Για ένα αφιχθέντα πελάτη η πληροφορία $Q^- > 0$ σημαίνει ότι έχει φθάσει κατά την περίοδο συνεχούς λειτουργίας του συστήματος

$$E[S \mid Q^- > 0] = E[Q^- \mid Q^- > 0]\, b + E[\text{Υπολοιπ. χρόνος ως την επόμενη αναχ.} \mid Q^- > 0]$$

Αν "κολλήσουμε" όλες τις περιόδους συνεχούς λειτουργίας τότε οι αναχωρήσεις γίνονται τις στιγμές μιας ανανεωτικής διαδικασίας με ενδιάμεσους χρόνους τους χρόνους εξυπηρέτησης

Άρα, $E[\text{Υπολ. ως την επόμ. αναχ.} \mid Q^- > 0] = \underbrace{E[B(t)]}_{\text{Υπολ. χρόνος αναν. σε μια ανανεωτική διαδ. με ενδιάμεσους χρόνους τους χρόνους εξυπηρέτησης}} = \dfrac{b^2 + \sigma^2}{2b}$

Άρα $$E[S] = (1-\rho) b + P[Q^- > 0]\left(E[Q^- \mid Q^- > 0]\, b + \frac{b^2+\sigma^2}{2b}\right)$$

$$= (1-\rho) b + E[Q^- \mathbb{1}\{Q^- > 0\}]\, b + \rho \frac{b^2+\sigma^2}{2b}$$

$$E[Q^- \mathbb{1}\{Q^- > 0\}] = E[Q^-] \overset{\text{PASTA}}{=} E[Q]$$

$$\Rightarrow E[S] = (1-\rho) b + (\lambda E[S])\, b + \rho \frac{b^2+\sigma^2}{2b}$$

$$\Rightarrow (1-\rho) E[S] = (1-\rho) b + \rho \frac{b^2+\sigma^2}{2b}$$

$$\Rightarrow E[S] = b + \underbrace{\frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{b^2+\sigma^2}{2b}}_{E[W]}$$

και $$E[Q] = \rho + \lambda \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{b^2+\sigma^2}{2b}$$

⑥ Ασκ. 5 / Φυλ. 8

M/M/1 με απενεργοποιήσεις
και χρόνους εκκίνησης

Θ Little $E[Q] = \lambda E[S]$

Έστω I η κατάσταση του υπηρέτη. $I = \begin{cases} 1 & \text{ενεργοποιημένος} \\ 0 & \text{απενεργοποιημένος} \end{cases}$

Υπολογίζω το $E[S]$ δεσμεύοντας και στα Q^-, I^-

$$E[S] = \Big(\underbrace{E[Q^-]}_{\overset{\text{PASTA}}{=} E[Q]} + 1\Big)\cdot\frac{1}{\mu} + \underbrace{P[I^- = 0]}_{= 1-\rho}\cdot\frac{1}{\theta}$$

$P(I^- = 0) =$ ποσοστό χρόνου που ο υπηρέτης είναι απενεργοποιημένος $= 1-\rho$

Αυτό φαίνεται εφαρμόζοντας Θ Little στο χώρο εξυπηρέτησης

$$\underbrace{E[Q_s]}_{= P(I^-=1)} = \lambda b$$

Έχω $E[Q] = \lambda E[S]$

$$E[S] = E[Q]\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} + (1-\rho)\frac{1}{\theta}$$

$$E[S] = \rho E[S] + \frac{1}{\mu} + (1-\rho)\frac{1}{\theta}$$

$$E[S] = \frac{1}{\mu(1-\rho)} + \frac{1}{\theta} \quad \text{και} \quad E[Q] = \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{1}{\theta}$$

$$\frac{E[I]}{E[Z]} \quad E[I] = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\theta}$$

$\frac{E[I]}{E[Z]} =$ ποσοστό χρόνου που ο υπηρέτης είναι απενεργοποιημένος $= P(I^- = 0) = 1-\rho$

$$E[Z] = \frac{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\theta}}{1-\rho}$$

$$E[Y] = E[Z] - E[I]$$