Σχέδιο Μαθήματος

1) Βασικά στοιχεία Πιθανοτήτων
   - Δεσμευμένη Μέση τιμή
   - Πιθανογεννήτριες - Μετασχηματισμοί Laplace-Stieltjes
   - Εκθετική Κατανομή

2) Διαδικασία Poisson
   - Εναλλακτικοί ορισμοί
   - Βασικές ιδιότητες
   - Διάσπαση, υπέρθεση
   - Μή-ομογενή και σύνθετη διαδ. Poisson

3) Ανανεωτική Θεωρία
   - Ορισμός + βασικοί υπολογισμοί
   - Ανανεωτικός Συλλογισμός
   - Στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με αμοιβές ή κόστη

4) Εισαγωγή στις Ουρές Αναμονής

- Βασικές έννοιες

- Κλασικά συστήματα

Πηγές Μαθήματος

- Βιβλία: • Φακίνος Δ. Στοχαστικά μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα.

  • Kulkarni

- E-class + Delos (Βιντεοσκοπημένα μαθήματα), Φυλλάδια ασκήσεων

Δεσμευμένη Μέση Τιμή

1) Δεσμευμένες σ.π. ή σ.π.π.

(X, Y) τ.μ. με απο κοινού σ.π.:

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y) \quad X, Y: \text{διακριτές}$$

ή σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \, \partial y}$ X,Y : συνεχείς

οπου $F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$.

Τοτε $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \Rightarrow$

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} P(X=x \mid Y=y) & X,Y: \text{διακριτές} \\ \lim\limits_{\delta x \to 0^+} \lim\limits_{\delta y \to 0^+} \dfrac{P(x < X \le x+\delta x \mid y < Y \le y+\delta y)}{\delta x} & X,Y: \text{συνεχείς.} \end{cases}$$

* Για κάθε σταθερό y η $f_{X|Y}(x|y)$ είναι σ.π. ή σ.π.π. δηλαδή

$$\left.\begin{aligned} &\forall y: \text{σταθερό} \; f_{X|Y}(x|y) \ge 0 \quad x \in \mathbb{R} \\ &\sum_x f_{X|Y}(x|y) = 1 \end{aligned}\right] \; \underline{\text{διακριτή περίπτωση}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \forall y: \text{σταθερό} \quad f_{X|Y}(x|y) \geq 0 \quad x \in \mathbb{R} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)\, dx = 1 \end{array}\right] \text{συνεχής περίπτωση}$$

2) Δεσμευμένη μέση τιμή

- $E[X|Y=y]$: είναι αριθμός
- $E[X|Y]$: είναι τ.μ.
- $E[X|\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ενδεχόμενο}}}{A}]$: είναι αριθμός

▶ $$E[X|Y=y] = \begin{cases} \sum_x x\, f_{X|Y}(x,y) & X: \text{διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|Y}(x,y)\, dx & X: \text{συνεχής} \end{cases}$$

↑

Καλύτερη πρόβλεψη για την X δοθείσης της πληροφορίας $Y = y$.

πχ. X: ύψος, Y: βάρος $E[X|Y=90]$: Μέσο ύψος ανθρώπων με βάρος 90 κιλά.

Συμβολίζουμε: $m_{X|Y}(y) = E[X|Y=y]$

▶ $E[X|Y] = m_{X|Y}(Y)$

↑

Η βέλτιστη πρόβλεψη της X από συνάρτηση της Y.

▶ $$E[X|A] = \frac{E[X\cdot 1_A]}{P(A)}$$

↑ Η καλοτερη προβλεψη της X δεδομένου του ενδεχομένου A

πχ: X: ύψος, Y: βάρος $A = \{Y \in [60, 80]\}$

$E[X|A]$: μέσο ανθρωπων με βάρος απο 60 μέχρι 80 κιλά.

* Το $E[X|A]$ είναι γενίκευση του $E[X|Y=y]$

3) Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας και Θεώρημα Δεσμευσης για την μέση τιμή.

• Θ.Ο.Π: Αν $A_1, A_2, \ldots$ διαμέριση του Ω $\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \Omega,\ A_i \cap A_j = \emptyset\ \forall i \neq j\right)$ τότε

$$P(B) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)\cdot P(B|A_i)$$

• Θ.Δ.Μ.Τ: Αν $A_1, A_2, \ldots,$ διαμέριση του Ω τότε

$$E[X] = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)\cdot E[X|A_i]$$

Αποδειξη: $$\sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)\cdot E[X|A_i] = \sum_{i=1}^{+\infty} \cancel{P(A_i)}\cdot \frac{E[X\cdot 1_A]}{\cancel{P(A_i)}} =$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} E[X 1_A] \underset{\uparrow\ \text{Αν } \sum_{i=1}^{+\infty} X_i < +\infty}{=} E\Big[X \underbrace{\sum_{i=1}^{+\infty} 1_A}_{=1}\Big] = E[X]$$

4) Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής

Αποτελεί πόρισμα του ΘΔΜΤ για $A_i = \{Y = y_i\}$

$$E[X] = \sum_i P(Y=y_i) \cdot E[X|Y=y_i] =$$

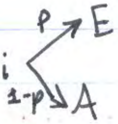
$$\sum_i P(Y=y_i)\, m_{X|Y}(y_i) = E[m_{X|Y}(Y)]$$

$$\Rightarrow E[X] = E[E[X|Y]].$$

$$E[X] = \begin{cases} \sum_i f_Y(y_i) \cdot E[X|Y=y_i] & Y: \text{διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) \cdot E[X|Y=y]\, dy & Y: \text{συνεχής.} \end{cases}$$

5) Παράδειγμα 1:

Ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli

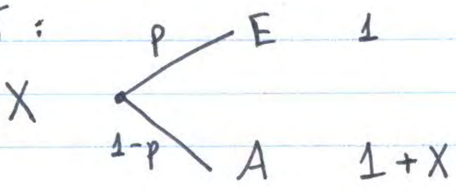


X = # δοκιμών ως προς την 1η E.

$f_X(x) = P(X=x) = (1-p)^{x-1} \cdot p \qquad x=1,2,\dots$

$E[X] = \sum_{i=1}^{+\infty} x\, f_X(x) = \dots = 1/p$

ΘΔΜΤ:



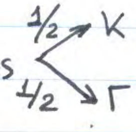
$$E[X] = P(\{E\})\cdot E[X \mid \{E\}) + P(\{A\})\cdot E[X \mid \{A\}] =$$

$$= p\cdot 1 + (1-p)(1+E[X]) \Rightarrow$$

$$p\cdot E[X] = 1 \Rightarrow E[X] = 1/p$$

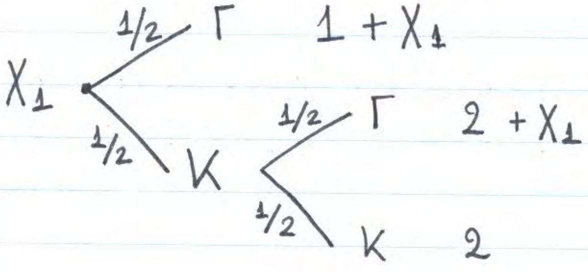
6) Παράδειγμα 2:

- Ανεξάρτητες ρίψεις δίκαιου νομίσματος



X_1 = # ρίψεων μέχρι $1^η$ φορά ΚΚ

X_2 = # ρίψεων μέχρι $1^η$ φορά ΚΓ



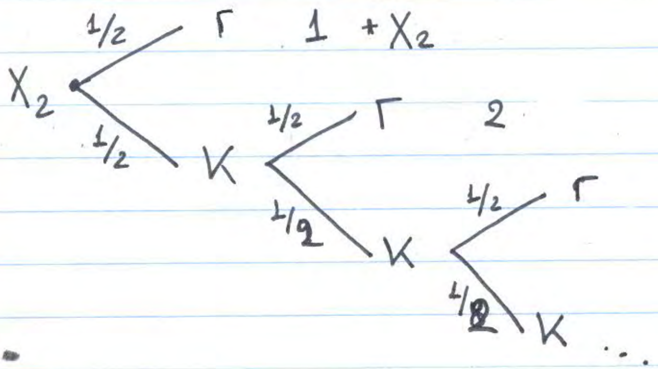
Θ.Δ.Μ.Τ : $E[X_1] = P(\{Γ\})\cdot E[X_1 \mid \{Γ\}) +$

$$P(\{ΚΚ)\cdot E[X_1 \mid \{ΚΓ\}) + P(\{ΚΚ\})\cdot E[X_1 \mid \{ΚΚ\})$$

$$= 1/2\cdot(1+E(X_1)) + 1/4\cdot(2+E(X_1)) +$$

$$1/4\cdot 2 \Rightarrow$$

$$1/4\ E[X_1] = 3/2 \Rightarrow E[X_1] = 6$$



- $E[X_2] = 1/2\,(1 + E(X_2)) + \sum_{k=2}^{+\infty} (1/2)^k \cdot k \Rightarrow$

$$E[X_2] = 1/2\,E[X_2] + \sum_{i=1}^{+\infty} (1/2)^i \cdot i$$

ή εναλλακτικά παρατηρω οτι αν έρθει Κ
έχω γεωμετρική κατανομή (περιμένω Γ)

$$E[X_2] = P(\Gamma) \cdot E(X_2|\Gamma) + P(K) \cdot E(X_2|K)$$
$$= 1/2 \cdot (1 + E(X_2)) + 1/2 \cdot (1 + \underset{\uparrow}{2})$$

μέση τιμή γεωμετρικής
"# φορων ως 1η φορά Γ"

$$\Rightarrow E[X_2] = 4$$

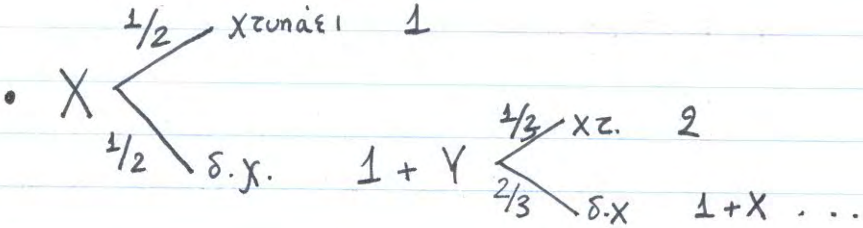
7) Παράδειγμα 3

2: Μονομάχοι A, B : ρίχνουν εναλλάξ

Ευστοχία A → 1/2   Ευστοχία B → 1/3

X = # ρίψεων έως κάποιος να χτυπηθεί όταν ξεκινάει ο A

Y = # ρίψεων έως κάποιος να χτυπηθεί όταν ξεκινάει ο B.



$$\left.\begin{aligned} E[X] &= 1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot (1 + E[Y]) \\ E[Y] &= 1/3 \cdot 2 + 2/3\,(1 + E(X)) \end{aligned}\right] \Rightarrow$$

$E[Y] = 5/2$ $E[X] = 9/4$

Πιθανογεννήτριες

1) Ορισμός

Για X διακριτή τ.μ. μή-αρνητική (≥ 0) και ακέραια

σ.π. $f_X(n) = P(X=n)$ $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Πιθανογεννήτρια:

$$P_X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_X(n)\, z^n = E[z^X]$$

2) Ιδιότητες

i) $P_X(z)$ συγκλίνει τουλάχιστον στον $\{ z : |z| \leq 1 \}$ (κλειστός μοναδιαίος δίσκος)

- $$|P_X(z)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f_X(n)\, |z|^n \underset{|z|\leq 1}{\overset{\uparrow}{\leq}} \sum_{n=0}^{+\infty} f_X(n) = 1$$

ii) $P_X(1) = 1$

iii) $P_X(z) = P_Y(z) \Longleftrightarrow X, Y$: ισόνομες

- $$f_X(n) \overset{\text{αναπτ. Taylor}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{P_X^{(n)}(0)}{n!} \underset{P_X(z) = P_Y(z)}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{P_Y^{(n)}(0)}{n!} = f_Y(n)$$

iv) $E[X_{(\nu)}] = E[X(X-1)\cdot\ldots\cdot(X-\nu+1] = P_X^{(\nu)}(1)$

- $$P_X^{(\nu)}(1) = \frac{\partial^\nu}{\partial z^\nu} \sum_{n=0}^{+\infty} f_X(n)\, z^n \Big|_{z=1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)\, f_X(n) =$$

$$= E[X(X-1)\cdot\ldots\cdot(X-r+1)] = E[X_{(r)}]$$

v) $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες με πιθανογεννήτρια

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{τότε}$$

$$P_{S_n}(z) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(z)$$

- $P_{S_n}(z) = E[z^{S_n}] \underset{\uparrow \atop \text{ανεξάρτητες}}{=} \prod_{i=1}^{n} E[Z^{X_i}] = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(z)$

vi) $X_1, X_2, \ldots$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων (έχουν πιθανογεννήτριες)
N: τ.μ. ανεξάρτητη των X_i με πιθανογεννήτρια.

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \quad \text{τότε} \quad P_{S_N}(z) = P_N(P_X(z))$$

- $P_{S_N}(z) = E[z^{S_N}] \overset{\text{Θ.Δ.Μ.Τ}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} f_N(n) \cdot E[z^{S_N} \mid N=n] =$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} f_N(n) \cdot E[z^{S_n} \mid \cancel{N=n}] \overset{v)}{=}$$

↑ επειδή είναι ανεξάρτητες

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} f_N(n) \cdot \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(z) \underset{iii)}{\overset{\text{ισόνομες}}{=}} \sum_{n=0}^{+\infty} f_N(n)\, P_X(z)^n =$$

$$= E[P_X(z)^N] = P_N(P_X(z))$$

Παρατήρηση: • $E[X] = P_X'(1)$

• $V[X] = E[X^2] - E^2[X] =$

$= E[X(X-1)] + E[X] - E^2[X] =$

$= P_X''(1) + P_X'(1) - (P_X'(1))^2.$

3) Βασικές Δυναμοσειρές για Πιθανότητες

i) $$\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \qquad |z| < 1$$

ii) $$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

$n \ +\infty \longrightarrow$

iii) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k = (1+z)^n$$

iv) $$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k}{n} z^k = \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}} \qquad |z| < 1$$

• $$\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \overset{\partial^n/\partial z^n}{\Longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} k(k+1)\ldots(k-n+1)\, z^{k-n} \underline{=}$$

$$= \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \Longrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-n+1)}{n!}}_{= \frac{k!}{(k-n)!\,n!} = \binom{k}{n}} z^k = \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}}$$

4) Πιθανογεννήτριες Κλασσικών Διακριτών Κατανομών

i) $X \sim Geom(p)$, $f_X(k) = (1-p)\,p^k \quad k=0,1,\dots$
(αριθμος επιτυχιων ως την $1^{η}$ αποτυχια)

$$P_X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)\,p^k z^k = (1-p)\sum_{k=0}^{+\infty} (pz)^k = \frac{1-p}{1-pz}$$

οταν $|pz| < 1$

ii) $X \sim Poisson(\rho)$, $f_X(k) = e^{-\rho}\, \rho^k/k! \quad k=0,1,\dots$

$$P_X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\rho}\,\rho^k/k!\; z^k = e^{-\rho(1-z)}$$

iii) $X \sim Bin(n,p) \quad f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k=0,\dots,n$

$$P_X(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} z^k = (1-p)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{pz}{1-p}\right)^k$$

$$= (1-p)\cdot\left(1 + \frac{pz}{1-p}\right)^n = (\underbrace{1-p+pz}_{\text{(της Bernoulli χωρις τον εκθετη)}})^n$$

iv) $X \sim NegBin(n,p) \quad f_X(k) = \binom{k+n-1}{n-1} p^k (1-p)^n \quad k=0,1,\dots$
(# επιτυχιων μεχρι $n^{οστη}$ αποτυχια)

$$P_X(z) = \left(\frac{1-p}{1-pz}\right)^n \quad |pz|<1 \quad \text{αφού}$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{οπου} \quad X_i \sim Geom(p)$$

5) Αντιστροφή Πιθανογεννητριών.

$$P_X(z) \longrightarrow f_X(n) \qquad n = 0, 1, \ldots$$

πιθανογεννήτρια ⟶ σ.π.

ακριβής τύπος ή αναδρομική σχέση

6) Παράδειγμα 1.

$$P_X(z) = \frac{az+b}{z^2 - 5/2\, z + 1} \qquad f_X(n) = ;$$

$$P_X(1) = 1 \Rightarrow 1 - 5/2 + 1 = a + b \Rightarrow a + b = -1/2$$

$$P_X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{az+b}{(z-2)(z-1/2)}$$

Πρέπει να συγκλίνει στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\{z : |z| \leq 1\}$

→ Άρα για οποια ρίζα του $D(z)$ πρέπει να είναι και ρίζα του $N(z)$

Άρα $D(1/2) = 0 \Rightarrow N(1/2) = 0 \Rightarrow a/2 + b = 0$

$$\begin{cases} a + b = -1/2 \\ a/2 + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1/2 \end{cases}$$

$$P_X(z) = \frac{-z + 1/2}{z^2 - 5/2\, z + 1} = \frac{-z + 1/2}{(z-2)(z-1/2)} = \frac{1}{2-z} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - z/2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} (z/2)^k =$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (1/2)^{k+1} \cdot z^k \Longrightarrow f_X(k) = (1/2)^{k+1} \quad k = 0, 1, \ldots$$

$X \sim Geom(1/2)$

7) Παράδειγμα 2:

$$P_X(z) = \frac{c - 15z}{54 - 63z + 18z^2} \qquad f_X(k) = ;$$

$$P_X(1) = 1 \Rightarrow c = 24$$

$$P_X(z) = \frac{24 - 15z}{54 - 63z + 18z^2} = \frac{24 - 15z}{18(2-z)(3/2-z)} =$$

ρίζες εκτός μοναδιαίου άρα δεν έχω πρόβλημα

$$= \frac{A}{(2-z)} + \frac{B}{(3/2-z)}$$

$$A: \quad A + \frac{B}{(3/2-z)} \cdot (2-z) = \frac{24-15z}{18(3/2-z)} \xrightarrow{z=2}$$

$$A = 2/3$$

$$B: \frac{A}{2-z}(3/2-z) + B = \frac{24-15z}{18(2-z)} \xrightarrow{z=3/2}$$

$$B = 1/6$$

$$P_X(z) = \frac{2/3}{(2-z)} + \frac{1/6}{(3/2-z)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-z/2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1-\frac{2z}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{+\infty} (z/2)^k + \frac{1}{9} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2z}{3}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1/3 \cdot (1/2)^k + 1/9 \cdot (2/3)^k \right) z^k$$

Άρα $f_X(k) = 1/3 \, (1/2)^k + 1/9 \, (2/3)^k \quad k = 0, 1, \ldots$

Εναλλακτικά: Θα μπορούσα να βρώ αναδρομικό σχήμα.

$$P_X(z) = \frac{24-15z}{54-63z+18z^2} \Rightarrow (54-63z+18z^2)\underbrace{P_X(z)}_{\sum_{k=0}^{+\infty} f_X(k) z^k} = 24-15z$$

$$\Rightarrow 54\sum_{k=0}^{+\infty} f_X(k) z^k - 63\sum_{k=0}^{+\infty} f_X(k) z^{k+1} + 18\sum_{k=0}^{+\infty} f_X(k) z^{k+2} =$$

$$= 24 - 15z \Rightarrow$$

$$54\sum_{k=0}^{+\infty} f_X(k) z^k - 63\sum_{k=1}^{+\infty} f_X(k-1) z^k + 18\sum_{k=2}^{+\infty} f_X(k-2) z^k =$$

$$= 24 - 15z \Rightarrow$$

- $54 f_X(0) = 24 \Rightarrow f_X(0) = 24/54$
- $54 f_X(1) - 63 f_X(0) = -15 \Rightarrow f_X(1) = \frac{63}{54} f_X(0) - \frac{15}{54}$
- $54 f_X(k) - 63 f_X(k-1) + 18 f_X(k-2) = 0 \quad k \geq 2 \Rightarrow$

$$f_X(k) = \frac{63}{54} f_X(k-1) - \frac{18}{54} f_X(k-2)$$

8) Παράδειγμα 3:

$$P_X(z) = e^{-\lambda(1-z/2-z^2/2)} \quad , \quad f_X(k) = ;$$

⌛ Όταν έχω πιθανογεννήτρια εκθετικού τύπου ο ακριβής τύπος είναι δυσκολο να βρεθεί αλλα ευκολο το αναδρομικο σχήμα.

$$\boxed{\log P_X(z)} = -\lambda(1 - z/2 - z^2/2) \xRightarrow{\boxed{d/dz}}$$

$$\frac{P_X'(z)}{P_X(z)} = \lambda/2 + \lambda z \Rightarrow$$

$$P_X'(z) = (\lambda/2 + \lambda z)\, P_X(z) \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) f_X(k+1) z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda}{2} f_X(k) z^k + \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda f_X(k-1) z^k$$

- $f_X(0) = P_X(0) = e^{-\lambda}$
- $f_X(1) = \lambda/2\, f_X(0) = \lambda/2\, e^{-\lambda}$
- $f_X(k+1) = \frac{\lambda}{2(k+1)} f_X(k) + \frac{\lambda}{k+1} f_X(k-1) \quad k \geq 1$

Μετασχηματισμοί Laplace-Stieltjes

1) Ολοκληρώματα Riemann-Stieltjes

- $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ a\le x_1<\dots<x_n\le b \\ \max|x_{i+1}-x_i|\to 0 \\ \text{καθώς } n\to+\infty}}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})$$

Riemann

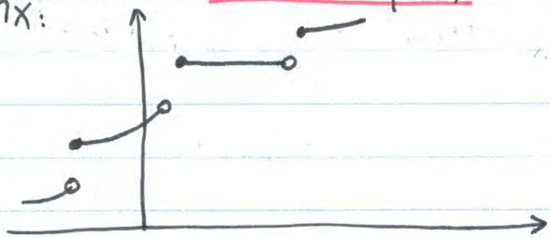
όπου $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k]$

- $$\int_a^b f(x)\,dF(x) = \lim_{\substack{\dots \\ (\text{όπως} \\ \text{πάνω})}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(F(x_k) - F(x_{k-1}))$$

Riemann-Stieltjes

→ Αν $F(x)$ αύξουσα (↑) με σημεία ασυνέχειας $x_0 < x_1 < \dots$ και παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(x_i, x_{i+1})\dots$ με $F'(x) = f(x)$

πχ:



(Αριθμήσιμα το πλήθος σημεία ασυνέχειας)

Τότε $$\int_a^b g(x)\,dF(x) = \int_a^b g(x) f(x)\,dx + \sum_{\substack{x_i\in[a,b] \\ \uparrow \\ \text{σημεία ασυνέχειας}}} g(x_i)\left(F(x_i) - F(x_i^-)\right)$$

→ Αν X: τ.μ. με σ.κ. $F(x)$ τότε

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dF_x(x)$$

* Με αυτόν τον τύπο "ενωποιούνται" οι συνεχείς, οι διακριτές και οι μεικτές τ.μ.

$$E[g(x)] = \begin{cases} \sum_x g(x)\, \underset{\uparrow \text{σ.π.}}{P(X=x)} & X: \text{διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, \overset{\swarrow \text{σ.π.π.}}{f_x(x)}\, d(x) & X: \text{συνεχής} \end{cases}$$

2) Μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes

Αν $X \geq 0$ τ.μ. με σ.κ. $F_x(x)$ ο Μετασχηματισμός L-S της X είναι

- $\widetilde{F}_X(s) = E[e^{-sX}] = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\, dF_x(x)$

3) Βασικές Ιδιότητες

i) Ο μετασχ. L-S συγκλίνει στο $\{s : Re(s) \geq 0\}$

ii) $\widetilde{F}_X(0) = 1$

iii) X, Y: ισόνομες $\Longleftrightarrow \tilde{F}_X(s) = \tilde{F}_Y(s)$

iv) $E[X^n] = (-1)^n \tilde{F}_X^{(n)}(0)$

v) $X_1, X_2, \dots, X_n$: ανεξάρτητες

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow \tilde{F}_{S_n}(s) = \prod_{i=1}^{n} \tilde{F}_{X_i}(s)$$

vi) $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητες και ισόνομες
N : ακέραια ≥ 0 ανεξάρτητη των X_i

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \quad \text{τότε}$$

$$\tilde{F}_{S_N}(s) = \underset{\uparrow}{P_N}(\tilde{F}_X(s))$$

πιθανογεννήτρια

Αποδείξεις: ii) $\tilde{F}_X(0) = \int_0^{+\infty} e^{-0x}\, dF_X(x) = \int_0^{+\infty} dF_X(x) = 1$

iv) $\tilde{F}_X^{(n)}(s) = \int_0^{+\infty} (-x)^n e^{-sx}\, dF(x)$

$(-1)^n \tilde{F}_X^{(n)}(0) = \int_0^{+\infty} x^n\, dF(x) = E(X^n)$

v) $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \Rightarrow e^{-sS_n} = e^{-s(X_1+\dots+X_n)} =$

ανεξ. τ.μ. $\rightarrow e^{-sX_1} \cdot \ldots \cdot e^{-sX_n} \Rightarrow$

$\tilde{F}_{S_n}(s) = E(e^{-sS_n}) = \tilde{F}_{X_1}(s) \cdot \ldots \cdot \tilde{F}_{X_n}(s)$

vi) $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \quad X_1, \cancel{X_2},$: ανεξ + ισόνομες

$N \geq 0$ ακεραια ανεξ. των X_i

$$\widetilde{F}_{S_N}(s) = E\left[e^{-s\sum_{i=1}^{N} X_i}\right] \overset{\text{Θ.Δ.Μ.Τ}}{\overset{\downarrow}{\doteq}} \sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n)\, E\left[e^{-s\sum_{i=1}^{N} X_i} \,\middle|\, N=n\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n)\, E\left[e^{-s\sum_{i=1}^{n} X_i} \,\middle|\, \cancel{N=n}\right] \overset{\substack{\text{ανεξάρτητες} \\ \text{+ ισόνομες}}}{=}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n)\left(\widehat{F}_X(s)\right)^n = P_N\left(\widehat{F}_X(s)\right)$$

4) Μετασχηματισμοί βασικών τ.μ.

- $X = 0 \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\widetilde{F}_X(s) = 1$$

- $X \sim \exp(\lambda) \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\widetilde{F}_X(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda / s+\lambda \qquad s > -\lambda$$

- $X \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$ (Ειδική περίπτωση της Γάμμα για $a=n$)

δλδ $X = X_1 + \ldots + X_n$ οπου $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ ανεξ.

$$\widetilde{F}_X(s) = \left(\lambda / s+\lambda\right)^n$$ απο v) ιδιοτητα.

$s > -\lambda$.

$$X \sim \text{Gamma}(a, \lambda)$$

$$f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \Big|_{x>0}$$

$\downarrow$ Ειδική περίπτωση $a \in \mathbb{N}, a = n.$

$$X \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$$

$$f_X(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} \Big|_{x>0}$$

- $X = c \rightarrow \tilde{F}_X(s) = e^{-cs}$
- $X \sim \text{Uniform}([0, c])$

$$\tilde{F}_X(s) = \int_0^c e^{-sx} \cdot 1/c \, dx = \frac{1 - e^{-cs}}{cs}$$

5) Παραδείγματα

i) Αθροισμα ανεξάρτητων Εκθετικών

$$X \sim \exp(\lambda) \qquad Y \sim \exp(\mu)$$

X, Y : ανεξάρτητες με $\lambda \neq \mu$.

$$X + Y \sim \,;$$

$$X \sim \exp(\lambda) \Rightarrow \tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s} \qquad s > -\lambda$$

$$X \sim \exp(\mu) \Rightarrow \tilde{F}_Y(s) = \mu/\mu+s \qquad s > -\mu.$$

Απο ιδιοτητα ν)

$$\tilde{F}_{X+Y}(s) = \tilde{F}_X(s)\cdot\tilde{F}_Y(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}\cdot\frac{\mu}{\mu+s} \qquad s>-\mu,-\lambda,$$

$$= \frac{\lambda\cdot\mu}{(s+\lambda)(s+\mu)} = \frac{A}{s+\lambda} + \frac{B}{s+\mu}$$

$$A:\ (s+\lambda)\tilde{F}_{X+Y}(s) = A + \frac{B}{s+\mu}(s+\lambda) \xRightarrow{s=-\lambda}$$

$$A = \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}$$

$$B:\ (s+\mu)\tilde{F}_{X+Y}(s) = \frac{A}{s+\lambda}(s+\mu) + B \xRightarrow{s=-\mu}$$

$$B = \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}$$

Αρα $\tilde{F}_{X+Y}(s) = \dfrac{\lambda\mu}{(s+\lambda)(\mu-\lambda)} + \dfrac{\lambda\mu}{(s+\mu)(\lambda-\mu)} =$

$$\frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}\cdot\frac{1}{s+\lambda} + \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}\cdot\frac{1}{s+\mu} =$$

$$\frac{\mu}{\mu-\lambda}\cdot\underset{exp(\lambda)}{\frac{\lambda}{s+\lambda}} + \frac{\lambda}{\lambda-\mu}\,\overset{exp(\mu)}{\frac{\mu}{s+\mu}}$$

Αρα $\underset{x>0}{F_{X+Y}(x)} = \dfrac{\mu}{\mu-\lambda}\cdot(1-e^{-\lambda x}) + \dfrac{\lambda}{\lambda-\mu}(1-e^{-\mu x})$

(Ψευδομίξη εκθετικών)

ii) Γεωμετρικό Άθροισμα Εκθετικών

$X_1, X_2, \ldots \sim \exp(\lambda)$ ανεξάρτητες

N : γεωμετρική $P(N=n) = (1-p)^{n-1} p \quad n=1,2,\ldots$

$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ N: ανεξάρτητη των X_i

Θδο $S_N \sim Exp(p\lambda)$

$$\tilde{F}_{S_N}(s) \overset{vi)}{=} P_N(\tilde{F}_X(s)) \quad \text{εδώ} \quad \tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda}$$

και $$P_N(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^{n-1} p z^n = \frac{pz}{1-(1-p)z}$$

$$\tilde{F}_{S_N}(s) = \frac{p \cdot \frac{\lambda}{s+\lambda}}{1-(1-p)\frac{\lambda}{s+\lambda}} = \frac{p\lambda}{s+\lambda-(1-p)\lambda} = \frac{p\lambda}{s+p\lambda}$$

Άρα πράγματι, $S_N \sim Exp(p\lambda)$

iii) Μίξη Εκθετικών (Υπερεκθετική 2)

$$X = \begin{cases} Y \sim \exp(\lambda_1) & \text{με πιθ } p_1 \\ Z \sim \exp(\lambda_2) & \text{με πιθ } p_2 \end{cases}$$

$p_1 + p_2 = 1$
$p_1, p_2 > 0$

$$\tilde{F}_X(s) = p_1 \cdot \frac{\lambda_1}{s+\lambda_1} + p_2 \cdot \frac{\lambda_2}{s+\lambda_2}$$

iv) Υπολογισμος $E[S_N]$, $Var[S_N]$ για τυχ. αθροισμα

$X_1, X_2, \dots$ ανεξ. ισονομες
$N \geq 0$ ακέραια ανεξ. των X_i

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad E[S_N], \; Var[S_N] = ;$$

$$\tilde{F}_{S_N}(s) = P_N(\tilde{F}_X(s)) \Longrightarrow$$

$$(I) \; \tilde{F}'_{S_N}(s) = P'_N(\hat{F}_X(s)) \cdot \tilde{F}'_X(s) \xRightarrow{s=0}$$

$$\tilde{F}'_{S_N}(0) = P'_N(1) \cdot \tilde{F}'_X(0) \xRightarrow{iv)}$$

$$-E[S_N] = E[N] \cdot (-E[X]) \Rightarrow$$

$$\boxed{E[S_N] = E[N] \cdot E[X]}$$

$$(I) \Rightarrow \; \tilde{F}''_{S_N}(s) = P''_N(\tilde{F}_X(s)) \cdot (F'_X(s))^2 + P'_N(\tilde{F}_X(s)) \cdot F''_X(s) \xRightarrow{s=0}$$

$$E[S_N^2] = E[N(N-1)] \cdot E^2[X] + E[N] \cdot E[X^2]$$

$$\Rightarrow Var(S_N) = E(S_N^2) - E^2(S_N) = E[N(N-1)] \cdot E^2[X] + E[N]\,E[X^2] - E^2[N]\,E^2[X] \Longrightarrow$$

$$Var(S_N) = (E[N^2] - E^2(N))(E(X))^2 + E(N)(E(X^2) - E^2(X)) \Longrightarrow$$

$$\boxed{Var(S_N) = Var(N) \cdot E^2(X) + E(N) \cdot Var(X)}$$

Εκθετική Κατανομή

1) Μοντέλο

$X \geq 0$, συνεχής , αμνήμονη ιδιότητα
(μη- γήρανσης)

αμνήμονη ιδιότητα → $P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t)$

Τότε $X \sim exp(\lambda)$ για κάποιο $\lambda > 0$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

$$f_X(x) = F_X'(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

Απόδειξη: Έστω $X \geq 0$, συνεχής με αμνήμονη ιδιότητα και $g(t) = P(X > t)$
(συνάρτηση επιβίωσης)

- $X \geq 0 \Rightarrow P(X \geq 0) = 1 \overset{X:\text{συνεχής}}{\Rightarrow} g(0) = 1$
  και $g(t) = 1 \quad \forall t < 0$

- X : συνεχής $\Rightarrow g(t)$: συνεχής

- X : αμνήμονη $\Rightarrow \dfrac{P(X > s+t)}{P(X > s)} = P(X > t)$

$\Rightarrow g(t+s) = g(s) \cdot g(t) \quad t, s > 0.$

·Έχουμε $g(t_1+t_2+\dots+t_n)=g(t_1)\cdot\ldots\cdot g(t_n)$ $t_1,\dots,t_n>0$ με επαγωγή.

$$g(1) = g(\underbrace{1/n+\dots+1/n}_{n-\text{φορές}}) = (g(1/n))^n \Rightarrow$$

$$g(1/n) = (g(1))^{1/n}$$

$$g(m/n) = g(\underbrace{1/n+\dots+1/n}_{m-\text{φορές}}) = (g(1/n))^m =$$

$$= (g(1))^{m/n} \quad m,n\in\mathbb{N} \quad m\neq 0.$$

Άρα $g(q) = (g(1))^q$ $\forall q\in\mathbb{Q}$, $q>0$.

·Έστω $x\in\mathbb{R}$, $x>0$

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} g(q_n) \quad (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q} \quad q_n>0$$

$$q_n \xrightarrow{n\to+\infty} x$$

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} g(q_n) = \lim_{n\to+\infty} g(1)^{q_n} =$$

$$= g(1)^{\lim_{n\to+\infty} q_n} = (g(1))^x$$

·Έστω $-\log g(1) = \lambda$ (είναι ≥ 0).

Τότε $$g(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 1 & x\leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$F_x(x) = 1 - g(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases} . \blacksquare$$

2) Βασικά στοιχεία

$$X \sim \exp(\lambda) \qquad \widetilde{F}_x(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda} \qquad s > -\lambda$$

- $E[X^n] = (-1)^n \widetilde{F}^{(n)}(0) = (-1)^n \lambda(-1)\cdot\ldots\cdot(-n)(s+\lambda)^{-(n+1)}\Big|_{s=0}$

$$= \frac{n!}{\lambda^n} .$$

Ειδικοτερα, $E(X) = 1/\lambda$
$Var(X) = 1/\lambda^2$

3) Ρυθμος βλάβης μή-αρνητ. συνεχών τ.μ.

$X \geq 0$, συνεχής με σ.π.π. $f_x(x)$
και σ.κ. $F_x(x)$

Ο <u>ρυθμος βλάβης</u> (βαθμίδα αποτυχιας, βαθμίδα κινδύνου, failure rate, hazard rate) της X

$$\lambda_x(t) = \lim_{h \to 0} \frac{P(t < X \leq t+h \mid X > t)}{h}$$

! Το $\lambda_X(t)$ χαρακτηρίζει την κατανομή της X

Έχουμε $$\lambda_X(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{P(t < X \le t+h)}^{= f_X(t)\ \text{σ.π.π}}}{h \; \underbrace{P(X>t)}}$$

$$1-\underbrace{F_X(t)}_{\text{σκ}} = \underbrace{R_X(t)}_{\text{συν. αξιοπ.}} = \underbrace{\bar{F}_X(t)}_{\text{συν. επιβ.}}$$

$$\Rightarrow \lambda_X(t) = \frac{(1-F_X(t))'}{1-F_X(t)} = -\frac{d}{dt}\log(1-F_X(t))$$

$$\Rightarrow \int_0^t \lambda_X(u)\,du = \log(1-F_X(t)) - \overset{0}{\cancel{\log(1-F_X(\overset{0}{0}))}}$$

$$\Rightarrow F_X(t) = 1-e^{-\int_0^t \lambda_X(u)\,du} \qquad t>0$$

$$f_X(t) = \lambda_X(t)\, e^{-\int_0^t \lambda_X(u)\,du} \qquad t>0.$$

▶ $X \sim \exp(\lambda) \Longleftrightarrow \lambda_X(t) = \lambda \quad \forall t>0$

4) Ιδιότητες Εκθετικής Κατανομής

αμνήμονη ιδιότητα → i) $X \sim exp(\lambda) \rightarrow P(X>t+s \mid X>s) = P(X>t)$

ιδιότητα κλίμακας → ii) $X \sim exp(\lambda)$, $a>0 \Rightarrow aX \sim exp(\lambda/a)$

ισχυρή αμνήμονη → iii) $X \sim exp(\lambda)$, $Y \geq 0$ ανεξάρτητη της X

$$\Rightarrow P(X>Y+t \mid X>Y) = P(X>t)$$

ιδιότητα minimum → iv) $X_1, \ldots, X_n$ ανεξ. $X_i \sim exp(\lambda_i)$

τότε $\min(X_1, \ldots, X_n) \sim exp(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$

Δείκτη minimum → v) $X_1, \ldots, X_n$ ανεξ. $X_i \sim exp(\lambda_i)$

τότε $P(X_k = \min(X_1, \ldots, X_n)) = \dfrac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$

ανεξαρτησία minimum + δείκτη → vi) $X_1, \ldots, X_n$ ανεξ. $X_i \sim exp(\lambda_i)$

ενδεχόμενο $\{N=k\} = \{X_k = \min(X_1, \ldots, X_n)\} \Rightarrow$

N, $\min(X_1, \ldots, X_n)$: ανεξάρτητες τ.μ.

(το ποιό χάλασε ↑ το πότε χάλασε)(← ανεξάρτητα!)

αθροίσματα συγκεκρ. αριθμού → vii) $X_1, \ldots, X_n$ ανεξ. $X_i \sim exp(\lambda)$ (ισονομες)

$$\Longrightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Erlang(n, \lambda)$$

άθροισμα γεωμετρικού αριθμού → viii) $X_1, X_2, \dots$ ανεξ + ισόνομες $\sim exp(\lambda)$

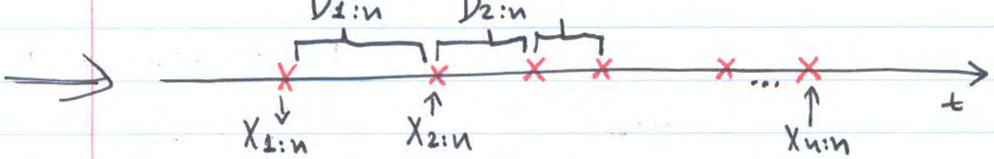
και N ανεξ των X_i με

$P(N=n) = (1-p)^{n-1} \cdot p \quad n \geq 1$

$$\Rightarrow S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \sim exp(\lambda \cdot p)$$

Spacings (διαστήματα των) → ix) $X_1, \dots, X_n \sim exp(\lambda)$ ανεξ.

$X_{i:n}$ = η i-οστή μικρότερη από τις $X_1, \dots, X_n$

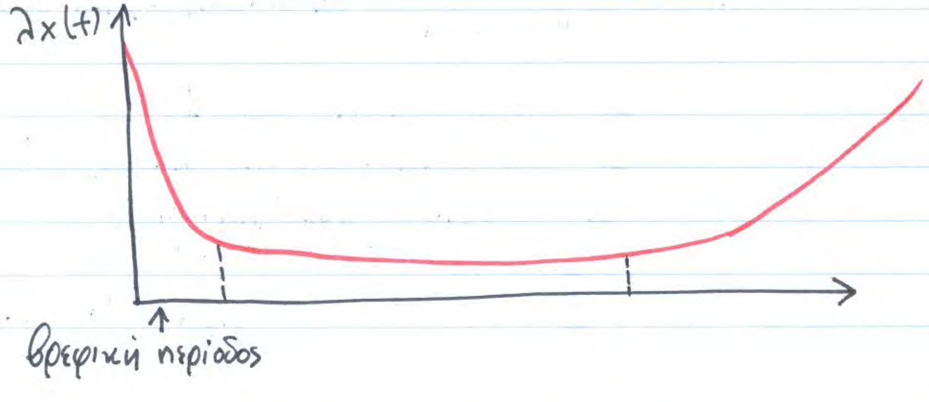


$$D_{i:n} = X_{\overset{+1}{i}:n} - X_{i-1:n}$$

Τότε $D_{1:n}, \dots, D_{n:n}$: ανεξάρτητες τ.μ.

$$D_{i:n} \sim Exp((n-i+1)\lambda)$$

* * *



Αποδειξεις:

i) Ορισμος

vii), viii) βλ. Μάθημα με μετασχ. L-S.

ii) $t > 0$

$$F_{aX}(t) = P(aX \le t) = P(X \le t/a) = 1 - e^{-\lambda t/a}$$

iii) $$P(X > Y+t \mid X > Y) = \frac{P(X > t+Y,\ X > Y)}{P(X > Y)}$$

$$= \frac{P(X > t+Y)}{P(X > Y)} = \frac{\int_0^{+\infty} P(X > t+y \mid \cancel{Y=y}) f_Y(y)\,dy}{\int_0^{+\infty} P(X > y \mid \cancel{Y=y}) f_Y(y)\,dy} =$$

ανεξ.

$$= \frac{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(t+y)} f_Y(y)\,dy}{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} f_Y(y)\,dy} = \frac{e^{-\lambda t}\cancel{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} f_Y(y)\,dy}}{\cancel{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda y} f_Y(y)\,dy}} =$$

$$= e^{-\lambda t} = P(X > t)$$

iv), v), vi) $X_1, \dots, X_n$:ανεξ. $X_i \sim exp(\lambda_i)$

$t>0$: $F_{\min(X_1,\dots,X_n)}(t) = P(\min(X_1,\dots,X_n) \le t) =$

$1 - P(\min(X_1,\dots,X_n) > t) =$

$1 - P(X_1 > t, \dots, X_n > t) \overset{ανεξ.}{=}$

$1 - P(X_1 > t) \dots P(X_n > t) =$

$1 - (e^{-\lambda_1 t}) \cdot \ldots \cdot (e^{-\lambda_n t}) =$

$1 - e^{-\Sigma \lambda_i t}$ άρα $\min(X_1,\dots,X_n) \sim exp(\Sigma\lambda_i)$

$$P(X_\kappa = \min(X_1, \dots, X_n)) =$$

παραλείπω το $X_\kappa < X_\kappa$

$$P(X_\kappa < X_1 , \dots , X_\kappa < X_n) =$$

δε βάζω ίσο γιατί είναι συνεχής

$$= \int_0^{+\infty} P(X_\kappa < X_1, \dots, X_\kappa < X_n \mid X_\kappa = t)\, f_{X_\kappa}(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} P(X_1 > t, \dots, X_n > t)\, f_{X_\kappa}(t)\, dt =$$

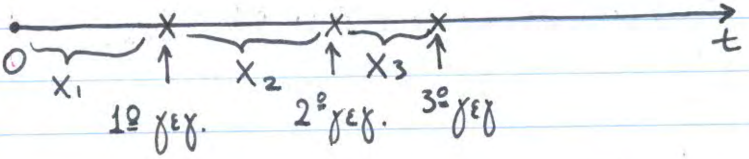
$$= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1 t} \cdot \dots \cdot e^{-\lambda_n t} \cdot \underbrace{e^{-\lambda_\kappa t} \cdot \lambda_\kappa}_{f_{X_\kappa}(t)}\, dt =$$

όχι $e^{-\lambda_\kappa t}$

$$\lambda_\kappa \int_0^{+\infty} e^{-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t}\, dt = \frac{\lambda_\kappa}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}.$$

Ανανεωτική Θεωρία

1) Σημειακές διαδικασίες



$X_1, X_2, \dots \geq 0$ ενδιάμεσοι χρόνοι γεγονότων

$S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$: χρόνοι γεγονότων

$N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$

$= \#$ γεγονοτων στο $[0,t]$

↑

Απαριθμήτρια σημειακή διαδικασία.

2) Ανανεωτικές διαδικασίες

$\{N(t): t \geq 0\}$ λέγεται ανανεωτική διαδικασία με κατανομή ενδιάμεσων χρονων $F_X(t)$ αν και μόνο αν η $\{N(t)\}$ είναι απαριθμήτρια σημειακη διαδικασια με ανεξάρτητους και ισόνομους ενδιάμεσους χρόνους $X_1, X_2, \dots \sim F_X(t)$

3) Βασικές Ποσότητες

- $F_{S_\kappa}(t) = P(S_\kappa \leq t)$ ↙ ποτε συμβαίνει το κ-οστό γεγονός
- $P_\kappa(t) = P(N(t) = \kappa)$ ↙ πιθ. την στιγμή t να έχουν συμβεί κ
- $m(t) = E(N(t))$: ανανεωτική συνάρτηση

4) Υπολογισμοί βασικών ποσοτήτων.

Υπενθύμιση (Πιθανότητες) Συνέλιξη κατανομών → X, Y τ.μ. ανεξ και $Z = X + Y$.

F_X, F_Y, F_Z : αντίστοιχες συναρτήσεις κατανομής.

$$F_Z(t) = P(Z \leq t) \underset{Y:\text{συν.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} P(Z \leq t \mid Y = y)\, f_Y(y)\, dy$$

$\underline{\underline{\text{ή}}}$ $\sum_y P(Z \leq t \mid Y = y)\, P(Y = y)$ ↙ Y: διακρ.

$$= \begin{cases} \sum_y P(X \leq t-y) \cdot P(Y=y) & , \ Y: \text{διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} P(X \leq t-y) \cdot f_Y(y)\, dy & , \ Y: \text{συνεχής} \end{cases} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(t-y)\, dF_Y(y) \doteq (F_X * F_Y)(t)$$

↑ ορο: Συνέλιξη Κατανομών

Συνελίξεις πυκνοτήτων → X, Y : συνεχείς, ανεξάρτ. με σ.π.π. f_X, f_Y
και $Z = X + Y$ με σ.π.π. f_Z

$$f_Z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t-y)\, f_Y(y)\, dy \underset{\uparrow}{=} (f_X * f_Y)(t)$$

Ορο: Συνέλιξη πυκνοτήτων

→ $$F_{S_k}(t) = P(S_k \leq t) = P\left(\sum_{i=1}^{k} X_i \leq t\right) \overset{X_i:\text{ανεξ.}}{=}$$

$$(F_{X_1} * F_{X_2} * \ldots * F_{X_k})(t) \overset{X_i:\text{ισον}}{=} (F_X * \ldots * F_X)(t) =$$

$$= \underline{F_X^{*k}(t)}$$ ← κ-οστής τάξης συνέλιξη (κατανομών) της F_X.

→ Για την $P_k(t)$ χρησιμοποιούμε τη <u>βασική σχέση - γέφυρα</u>

$$\{S_k\} \longleftrightarrow \{N(t)\}$$

<u>βασική σχέση</u>

$$\boxed{\{S_k \leq t\} = \{N(t) \geq k\}}$$

$\{S_{k+1} \leq t\} \subseteq \{S_k \leq t\}$

$$P_k(t) = P(N(t) = k) = P(S_k \leq t < S_{k+1}) \overset{\downarrow}{=}$$

$$P(S_k \leq t) - P(S_{k+1} \leq t) =$$

$$\underline{F_X^{*k}(t) - F_X^{*(k+1)}(t)}$$

$$P_0(t) = P(\mathcal{N}(t)=0) = P(S_1 > t) = 1 - F_X(t).$$

(Ο γενικος τύπος ισχυει για κ = 0
με τη σύμβαση $F_X^{*0}(t) = 1$)

$$\rightarrow \; m(t) = E[\mathcal{N}(t)] = E\left[\sum_{k=1}^{+\infty} 1_{\{S_k \le t\}}\right] =$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} E\left[1_{\{S_k \le t\}}\right] \overset{(\text{μέση τιμή δείκτριας = πιθ. ενδεχομ.})}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} P(S_k \le t) = \sum_{k=1}^{+\infty} F_X^{*k}(t)$$

$$\boxed{\mathcal{N}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} 1_{\{S_k \le t\}}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} F_{S_k}(t) &= P(S_k \le t) = F_X^{*k}(t) \\ P_k(t) &= P(\mathcal{N}(t) = k) = F_X^{*k}(t) - F_X^{*(k+1)}(t) \\ m(t) &= E[\mathcal{N}(t)] = \sum_{k=1}^{+\infty} F_X^{*k}(t) \end{aligned}}$$

5) Μετασχηματισμοί L-S βασικών ποσοτήτων

▶ $\tilde{F}_{S_k}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dF_{S_k}(t) = \left(\tilde{F}_X(s)\right)^k$

▶ $\tilde{P}_k(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dP_k(t) = \left(1-\tilde{F}_X(s)\right)\left(\tilde{F}_X(s)\right)^k$

▶ $\tilde{m}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dm(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\tilde{F}_X(s)\right)^k = \dfrac{\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)}$

6) Υπολογισμός ανανεωτικών συναρτήσεων μέσω L-S.

$$\begin{tikzcd}
\text{Δεδομένο} & \text{Ζητούμενο} \\
F_X(t) \arrow[r, "(?)"] \arrow[d] & m(t) \\
\tilde{F}_X(.) \arrow[r] & \tilde{m}(s) \arrow[u, "\leftarrow \text{αντιστροφή μετασχηματισμού}"']
\end{tikzcd}$$

$F(t)$	$\tilde{F}(s)$
$1\{t \geq 0\}$	1
t	$1/s$
$1 - e^{\lambda t}$	$\lambda/\lambda+s$
$1-\sum_{n=0}^{k-1} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$	$(\lambda/\lambda+s)^k$

7) Παράδειγμα 1: Exp(λ) ενδιάμεσοι χρόνοι

$$F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad t \geq 0$$

$$\widehat{F}_X(t) = \lambda/\lambda + s \qquad s > -\lambda$$

$$\widetilde{F}_{S_k}(t) = (\widetilde{F}_X(s))^k = (\lambda/\lambda+s)^k$$

Άρα $$F_{S_k}(t) = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$\widetilde{P}_k(s) = (1 - \widetilde{F}_X(s))(\widetilde{F}_X(s))^k = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^k - \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^{k+1}$$

Άρα $$P_k(t) = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} - 1 + \sum_{n=0}^{k} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$\Rightarrow P_k(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$$\widetilde{m}(s) = \frac{\widehat{F}_X(s)}{1 - \widetilde{F}_X(s)} = \frac{\lambda/\lambda+s}{1 - \lambda/\lambda+s} = \frac{\lambda}{s}$$

Άρα $$m(t) = \lambda \cdot t$$

8) Παράδειγμα 2:

$$X_k = \begin{cases} 0 & , \text{με πιθ. } p \\ Exp(\lambda) & , \text{με πιθ } 1-p \end{cases}$$

$$F_X(t) = p \cdot 1 + (1-p)(1-e^{-\lambda t}) \quad t \geq 0$$

$$\tilde{F}_X(s) = p + (1-p) \cdot \frac{\lambda}{\lambda+s} = \frac{\lambda + ps}{\lambda+s}$$

$$\tilde{m}(s) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)} = \frac{\frac{\lambda+ps}{\lambda+s}}{1-\frac{\lambda+ps}{\lambda+s}} = \frac{\lambda+ps}{(1-p)s}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{m}(s) = \frac{p}{1-p} + \frac{\lambda}{(1-p)s}$$

Άρα $m(t) = \frac{p}{1-p} + \frac{\lambda}{1-p} \cdot t$

9) Παράδειγμα 3:

$$X_k = \begin{cases} Exp(\mu) & , \text{πιθ } p \\ Exp(\lambda) & , \text{πιθ. } 1-p \end{cases}$$

$$F_X(t) = p \cdot (1-e^{-\mu t}) + (1-p)(1-e^{-\lambda t})$$

$$\tilde{F}_X(s) = p \cdot \frac{\mu}{\mu+s} + (1-p)\frac{\lambda}{\lambda+s} =$$

$$= \frac{\mu\lambda + (p\mu + (1-p)\lambda)s}{(s+\mu)(s+\lambda)}$$

$$\widetilde{m}(s) = \frac{\widetilde{F}_X(s)}{1-\widehat{F}_X(s)} = \frac{\mu\lambda + (p\mu + (1-p)\lambda)s}{s^2 + ((1-p)\mu + p\lambda)s} =$$

$$= \frac{\mu\lambda + (p\mu + (1-p)\lambda)s}{s(s+(1-p)\mu + p\lambda)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+(1-p)\mu + p\lambda}$$

Οπου τα A, B βρίσκονται κατα τα γνωστά (να βρεθουν σπιτι)

Τελικά $m(t) = A \cdot t + \frac{B}{(1-p)\mu + p\lambda} \cdot (1 - e^{-[(1-p)\mu + p\lambda]t}$