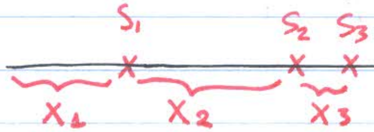
Βασική Οριακή Θεωρία
Ανανεωτικός Συλλογισμός

1) Πλαίσιο



$\sim F_X(t)$, ανεξάρτητες

$N(t) = \#$ γεγονότων στο $(0, t]$

$m(t) = E[N(t)]$: ανανεωτική συνάρτηση

2) Συμπεριφορά της $N(\infty)$

$$N(+\infty) = \lim_{t \to +\infty} N(t) = \# \text{ γεγονότων στο } (0, +\infty)$$

Θεωρ.

1) $F_X(+\infty) = \lim_{t \to +\infty} F_X(t) = P(X_n < +\infty) = 1 \Rightarrow$

$$P[N(+\infty) = +\infty] = 1$$

2) $F_X(+\infty) = P(X_n < +\infty) < 1 \Rightarrow$

$$P[N(+\infty) < +\infty] = 1$$

$$P(N(+\infty) = k) = (1 - F_X(+\infty)) \cdot [F_X(+\infty)]^k$$

Άρα $N(+\infty) \sim Geom(F_X(+\infty))$

3) Υπενθύμιση από Θεωρία Πιθανοτήτων

- **Νόμος Μεγάλων αριθμών**

$X_1, X_2, \dots$ ανεξ. + ισόν. με $E[X_i]=\mu$

$$\Rightarrow \quad P\left[\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum^{n} X_i}{n} = \mu\right] = 1$$

- **Κεντρικό Οριακό Θεώρημα**

$X_1, X_2, \dots$ ανεξ + ισονομ. με $E[X_i]=\mu<+\infty$ και $Var[X_i]=\sigma^2$ τότε

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\frac{\sum^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{σ.κ της } N(0,1)}}{\Phi(x)}$$

4) Αντίστοιχα οριακά Θεωρήματα στην Ανανεωτική Θεωρία

$\{N(t)\}$: αναν. διαδικ. με ενδιάμεσους χρόνους $X_1, X_2, \dots \sim F_X(t)$. ανεξ. με $E[X_i]=\mu$.
$Var(X_i)=\sigma^2$, $m(t)=E[N(t)]$

- **Ν.Μ.Α.:** $P\left(\lim_{t\to+\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}\right)=1$

- **Σ.Α.Θ: (Στοιχειώδες Ανάν. Θεώρημα)**

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$$

• Κ.Ο.Θ: $\lim_{t\to+\infty} P\left(\frac{N(t) - t\cdot(1/\mu)}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}} \leq x \right) = \Phi(x)$

5) Ανανεωτικός συλλογισμός

Ανανεωτικος συλλογισμος = Δεσμευση στον S_1

↓

Εξίσωση για κάποια πιθανότητα ή μέση τιμή που εξαρτάται απο το t.

<u>πχ:</u> $h(t) = P(N(t) : \text{άρτιος})$

ή $h(t) = E[N(t)]$

ή $h(t) = E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i)\right]$

6) Παράδειγμα 1: Ανανεωτική Εξίσωση για την $h(t) = m(t)$

$h(t) = m(t) = E[N(t)]$

S_n: ο χρόνος του n-οστού γεγονότος

$F_X(t)$: κατανομή ενδιάμεσων χρόνων

$$h(t) = E[N(t)] = \int_0^{+\infty} E[N(t) \mid S_1 = u] \, dF_X(u)$$

$$\bullet \; E[N(t) \mid S_1 = u] = \begin{cases} 0, & u \geq t \\ 1 + \underset{\underset{1 + m(t-u)}{\parallel}}{E[N(t-u)]}, & u < t \end{cases}$$

Άρα $h(t) = \int_0^t 1 + h(t-u)\, dF_X(u) + \cancel{\int_t^{+\infty} 0\, dF_X(u)} \Rightarrow$

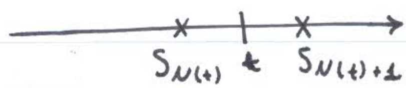
$$\boxed{h(t) = F_X(t) + \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u)}$$

: Αναν. εξίσωση για την Αναν. συνάρτ.

$(h * F_X(t))$

7) Παράδειγμα 2: Αναν. Εξισ. για την $h(t) = E[S_{N(t)+1}]$

$S_{N(t)+1}$ = Χρονος 1ου γεγονότος μετά την χρον. στιγμή t.



$$h(t) = E[S_{N(t)+1}] = \int_0^{+\infty} E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u]\, dF_X(u).$$

$$\cdot\, E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u] = \begin{cases} u & u > t \\ u + h(t-u) & u \le t \end{cases}$$

Άρα $h(t) = \int_0^t u + h(t-u)\, dF_X(u) + \int_t^{+\infty} u\, dF_X(u) \Rightarrow$

$$h(t) = \int_0^{+\infty} u\, dF_X(u) + \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u) \Rightarrow$$

$$h(t) = E[X] + \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u).$$

8) Λύση Ανανεωτικών Εξισώσεων

γενική μορφή αναν. συνάρτ.

$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)\,dF_x(u) =$$

$$= d(t) + (h * F_x)(t)$$

$$\text{M.L-S} \Rightarrow \tilde{h}(s) = \tilde{d}(s) + \tilde{h}(s)\cdot\tilde{F}_x(s) \Longrightarrow$$

$$\tilde{h}(s) = \tilde{d}(s)\cdot\frac{1}{1-\tilde{F}_x(s)} \Rightarrow$$

$$\tilde{h}(s) = \tilde{d}(s)\cdot\left(1 + \frac{\tilde{F}_x(s)}{1-\tilde{F}_x(s)}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\tilde{h}(s) = \tilde{d}(s) + \tilde{d}(s)\cdot\tilde{m}_x(s)} \Longrightarrow$$

Λύση της αναν. εξίσωσης.

$$h(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u)\,dm_x(u) =$$

$$= d(t) + (d * m_x)(t)$$

9) Παράδειγμα 1 : (συνέχεια)

$$m_x(t) = F_x(t) + (m_x * F_x)(t) \Rightarrow$$

$$m_x(t) = F_x(t) + (F_x * m_x)(t)$$

Η λύση της αναν. εξίσωσης δεν δίνει κάτι καινούριο

10) Παράδειγμα 1: Ειδική Περίπτωση

Έστω $\{N(t)\}$ με $X_1, X_2, \ldots$ ενδ. χρόνους που $\sim Uniform([0,1])$.

$m_X(t) = ;$ για $t \in (0,1)$

Η "κλασική" προσέγγιση για εύρεση της $m_X(t)$ είναι:

$$F_X(t) \to \tilde{F}_X(s) \to \tilde{m}_X(s) \to m_X(t).$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ t & 0 \le t \le 1 \\ 1 & t>1 \end{cases} \to \tilde{F}_X(s) = \int_0^1 e^{-st} \cdot 1\, dt = \frac{1-e^{-s}}{s}$$

$$\to \tilde{m}_X(s) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)} = \frac{1-e^{-s}}{s-1+e^{-s}}$$

είναι δύσκολη η αναστροφή

Εδώ συμφέρει να υπολογίσω την $m_X(t)$ μέσω της ανανεωτικής εξίσωσης:

$$m_X(t) = F_X(t) + \int_0^t m_X(t-u)\, dF_X(u) \Rightarrow$$

$$m_X(t) = t + \int_0^t m_X(t-u)\, du \quad \text{για } t \in (0,1)$$

$$\Rightarrow m_X(t) = t + \int_0^t m_X(y)\, dy \quad , \; t \in (0,1)$$

$$\Rightarrow m_X'(t) = 1 + m_X(t) \Rightarrow$$

$$e^{-t} m_X'(t) - e^{-t} m_X(t) = e^{-t} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-t} m_x(t)\right) = e^{-t} \qquad t \in (0,1) \implies$$

$$e^{-t} m_x(t) - e^{-0}\cdot \overset{0}{\cancel{m(0)}} = \int_0^t e^{-u}\,du \qquad t \in (0,1) \implies$$

$$m_x(t) = e^{t} - 1 \qquad t \in (0,1)$$

11) Παράδειγμα 2: (Συνέχεια)

$$h(t) = E[S_{N(t)+1}]$$

αναν. εξισ. $\rightarrow$ $h(t) = \underset{\overset{\|}{E[X]}}{\mu} + \int_0^t h(t-u)\,dF_x(u)$

$$\Downarrow$$

λυση αναν. εξισ. $\rightarrow$ $h(t) = \mu + \int_0^t \mu \, dm_x(u) \implies$

$$h(t) = \mu + \mu\, m_x(t) = \mu\left(1 + m_x(t)\right)$$

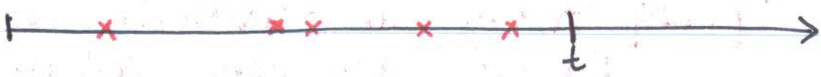
12) Οικονομική Ερμηνεία Ανανεωτικής Εξίσωσης + της λύσης της

$$h(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u)\, dm_x(u)$$

οπου $m_x(u) = \sum_{k=1}^{+\infty} F_x^{*k}(t)$ άρα

$$h(t) = d(t) + (d * F_x)(t) + (d * F^{*2})(t) + \ldots \implies$$

$$h(t) = d(t) + (d * F_{S_1})(t) + (d * F_{S_2})(t) + \ldots$$



Το $d(t)$ μπορώ να το "βλέπω" ως: επίδραση απο τη στιγμή 0
και το $(d * F_{S_k})$ ως: επίδραση απο το κ-οστό γεγονος.

Άρα το $h(t)$ που είναι το άθροισμα αυτων είναι η συνολική επίδραση απο όλα τα γεγονότα που συνέβησαν πριν το t

Άλλος τρόπος να δω τη συνολική επίδραση:

$$h(t) = \underset{\text{απ' τη στιγμή 0}}{\text{επίδραση}} + \underset{\text{απο όλα τα γεγονότα}}{\text{υπόλοιπη επίδραση}}$$

$$= d(t) + \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u)$$

Οριακή Θεωρία στις Ανανεωτικές Διαδικασίες
Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα.

1) Ανανεωτική Εξίσωση - Λύση

$$h(t) = d(t) + \underbrace{(h * F_X)(t)}_{\int_0^t h(t-u)\, dF_X(u)}$$

$$\downarrow$$

$$h(t) = d(t) + (d * m_X)(t)$$

Ερώτημα: $\lim_{t \to +\infty} h(t) = ;$

2) Περιοδικές - απεριοδικές τ.μ.

X τ.μ. λέγεται περιοδική αν $\exists p$:

$$P(X \in \{0, p, 2p, 3p, \dots\}) = 1$$

(Η X παίρνει τιμές μόνο σε ακέραια πολλαπλάσια του p όχι αναγκαστικά σε όλα)

Ο μέγιστος p με αυτή την ιδιότητα λέγεται περίοδος της X

Μια X τ.μ. λέγεται απεριοδική αν δεν είναι περιοδική.

3) Παραδείγματα

- X συνεχής τ.μ. ή μεικτή τ.μ. $\Rightarrow$

  X: απεριοδική

- $\left.\begin{array}{l} X \sim Bin(n,p) \\ X \sim Poisson(\lambda) \\ X \sim Geom(p) \end{array}\right\} \Rightarrow X$: περιοδική με περίοδο 1

- X: διακριτή με τιμές
  $P(X=0) = P(X=1) = P(X=\sqrt{2}) = 1/3$
  είναι απεριοδική.

- X: διακριτή με τιμές
  $1/n$ $n \geq 1$, είναι απεριοδική

4) Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα

$\{N(t)\}$: ανανεωτική διαδ. με καταν. ενδιαμ. χρόνων $F_X(t)$ και $m_X(t) = E[N(t)]$.
Έστω $h(t) = d(t) + (h * F_X)(t)$ ανανεωτική εξίσωση.

Υποθέσεις:
- $d(t) = d_1(t) - d_2(t)$ με $d_1(t), d_2(t) \geq 0$, φθίνουσες και φραγμένες
- $\int_0^{+\infty} |d(t)|\, dt < +\infty$

Τότε διακρίνω 2 περιπτώσεις:

1η: X: απεριοδική $\Rightarrow$

$$\lim_{t\to+\infty} h(t) = \frac{\int_0^{+\infty} d(t)\,dt}{\mu} \qquad \text{οπου } \mu = E[X]$$

2η: X: περιοδική με περίοδο p $\Rightarrow$

$$\lim_{t\to+\infty} h(tp+x) = \frac{p\cdot\sum_{k=0}^{+\infty} d(kp+x)}{\mu}$$

(Σε αυτή τη περίπτωση $\nexists \lim_{t\to+\infty} h(t)$ όμως $\exists$ το απο πάνω)

Ιδέα αποδειξης: (συνεχής X)

$\overset{0}{\leftarrow}$ απο υπόθεση $\int_0^{+\infty}|d(t)|\,dt < +\infty$

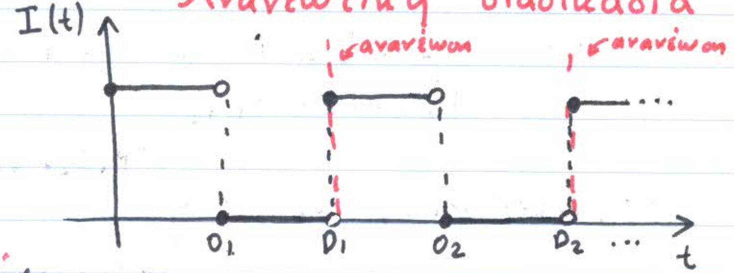
$$\lim_{t\to+\infty} h(t) = \cancel{\lim_{t\to+\infty} d(t)} + \lim_{t\to+\infty}\int_0^t d(t-u)\,dm_X(u) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\int_0^t d(t-u)\,\frac{1}{\mu}\,du = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\mu}\int_0^t d(t-u)\,du \overset{y=t-u}{=}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\mu}\int_t^0 d(y)(-dy) = \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} d(y)\,dy$$

($\lim_{t\to+\infty}\frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$ (θέλει πολύ δουλειά για να αντικαταστήσεις το $1/\mu$ στο ολοκλήρωμα))

5) Εφαρμογή 1: Η εναλλασσόμενη Ανανεωτική διαδικασία



Μηχανή που εναλλάσσεται σε περιόδους λειτουργίας (operating) $O_1, O_2, \dots$ και αργίας (down) $D_1, D_2, \dots$

$I(t)$ = κατ. μηχανής την στιγμή t

$$I(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν λειτουργεί} \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(O_n, D_n) $n \geq 1$ είναι ανεξάρ. + ισόνομ. με κάποια κατανομή $F_{O,D}(x,y)$

$E[O_n] = \mu_0 < +\infty$ $E[D_n] = \mu_1 < +\infty$

κατανομή ενδιάμεσων χρόνων

Για ευκολία υποθέτουμε ότι η $F_{O+D}(x)$ είναι απεριοδική.

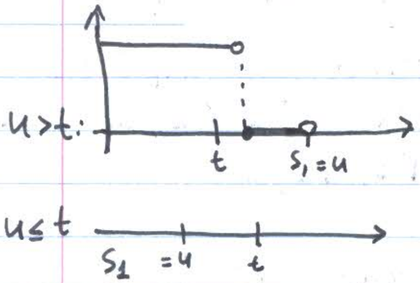
Ποιά η πιθανότητα να λειτουργεί η μηχανή την στιγμή t; $P[I(t)=1] = ;$

$\lim_{t \to +\infty} P[I(t)=1] = ;$

$$h(t) = P(I(t)=1) = \int_0^{+\infty} P[I(t)=1 \mid S_1 = u]\, dF_X(u)$$

όπου $S_1 = D_1 + O_1$ και
$F_X = F_{O+D}$

$$\bullet\ P(I(t)=1 \mid S_1 = u) = \begin{cases} P[O_1 > t \mid O_1 + D_1 = u] & u > t \\ P(I(t-u)=1) & u \le t \end{cases}$$



γραφική περιγραφή.

$$\text{Άρα } h(t) = \int_t^{+\infty} P[O_1 > t \mid O_1 + D_1 = u]\, dF_{O+D}(u) + \int_0^t h(t-u)\, dF_{O+D}(u)$$

$$d(t) = \int_t^{+\infty} P[O_1 > t \mid O_1 + D_1 = u]\, dF_{O+D}(u) =$$
$$= P(O_1 > t,\ O_1 + D_1 > t) = P(O_1 > t) =$$
$$= 1 - F_O(t)$$

$$\text{Άρα } P(I(t)=1) = h(t) = d(t) + (d * m_X)(t) =$$
$$1 - F_O(t) + \int_0^t (1 - F_O(t-u))\, dm_{O+D}(u)$$

πχ: **1)** $\left.\begin{array}{l} O_n \sim exp(\mu) \\ D_n \sim exp(\lambda) \end{array}\right\}$ Υπολογίζεται η $P(I(t)=1)$

+ ανεξάρτητες

ή **2)** $\left.\begin{array}{l} O_n \sim exp(\mu) \\ D_n = c \cdot O_n \end{array}\right\}$ Υπολογίζεται η $P(I(t)=1)$

Στην ειδική περίπτωση **2)** οι υπολογισμοί είναι:

$$1 - F_0(t) = e^{-\mu t}$$

$$O_n + D_n = (1+c)\,O_n \sim exp(\mu/1+c)$$

το έχουμε δείξει παλαιότερα $\rightarrow$ $m_{O+D}(t) = \frac{\mu}{1+c} \cdot t$

Οπότε έχω: $P(I(t)=1) = e^{-\mu t} + \int_0^t e^{-\mu(t-u)} \frac{\mu}{1+c}\, du$

$$= e^{-\mu t} + \mu/1+c \int_0^t e^{-\mu y}\, dy = e^{-\mu t} + \frac{1-e^{-\mu t}}{1+c}$$

$$\lim_{t \to +\infty} P(I(t)=1) = \lim_{t \to +\infty} h(t)$$

Εδώ: $d(t) = \underbrace{1 - F_0(t)}_{d_1(t)} - \underbrace{0}_{d_2(t)}$ όπου

$d_1(t), d_2(t) \geq 0$, φθίνουσες + γραμμ.

και $\int_0^{+\infty} |d(t)|\,dt = \int_0^{+\infty} (1 - F_0(t))\,dt = \mu_0 < +\infty$

(<u>Υπενθ:</u> $X \geq 0 \Rightarrow E(X) = \int_0^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx =$
$= \int_0^{+\infty} (1 - F_X(x))\, dx$

Απόδειξη: $E(X) = \int_0^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx =$
$= \int_0^{+\infty} \int_0^x dt\, f_X(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \int_t^{+\infty} f_X(x)\, dx =$)

$$\left(= \int_0^{+\infty} P(X>t)\,dt = \int_0^{+\infty} 1 - F_X(t)\,dt \;. \blacksquare \right)$$

Άρα από Βασ. Αναν. Θεωρ:

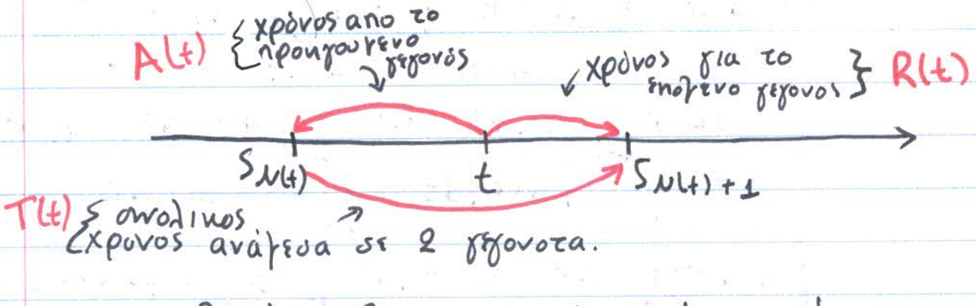
$$\lim_{t \to +\infty} P(I(t)=1) = \frac{\int_0^{+\infty} d(t)\,dt}{\mu} = \frac{\mu_0}{\mu_0 + \mu_D}$$

ποσοστό χρόνου (διαισθητικά)

*** Κάτι με ανανεωτική εξίσωση πάντα πέφτει στις εξετάσεις.

6) Εφαρμογή 2: Υπολειπ. χρ. ανάν, ηλικία, ολικός χρ. ανάν.

$\{N(t)\}$ ανάν. διαδ. με ενδ. χρ.
$X_1, X_2, \ldots \sim F_X(t)$, $E[X_i] = \mu < +\infty$
$Var(X) = \sigma^2 < +\infty$



• $\underline{R(t)} = S_{N(t)+1} - t$: Υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης (Remaining renewal time) ή προσδροφιμος χρόνος ανανέωσης

- $A(t) = t - S_{N(t)}$: Ηλικία ή αναδρομικός χρόνος ανανέωσης (age)

- $T(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$: t-εξαρτώμενος χρόνος ανανέωσης, ολικός χρόνος ανανέωσης (total renewal time)

$E(R(t)) = ;$ $\quad E(A(t)) = ;$ $\quad E(T(t)) = ;$

→ Συνήθης εικασία : $\lim_{t \to +\infty} E(R(t)) = \frac{E(X)}{2} = \frac{\mu}{2}$

το οποίο είναι λάθος
(Ανανεωτικό παράδοξο)

Σωστό : $\lim_{t \to +\infty} E(R(t)) = \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2\mu} = \frac{\mu}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu}$