Ηλικία, Υπολειπόμενος Χρόνος Ανανέωσης, Ολικός Χρόνος Ανανέωσης

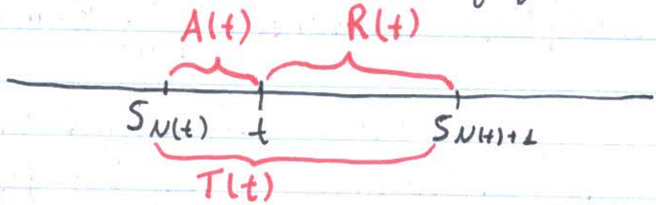
Μελέτη με αναν. συλλογ. και ΒΑΘ.

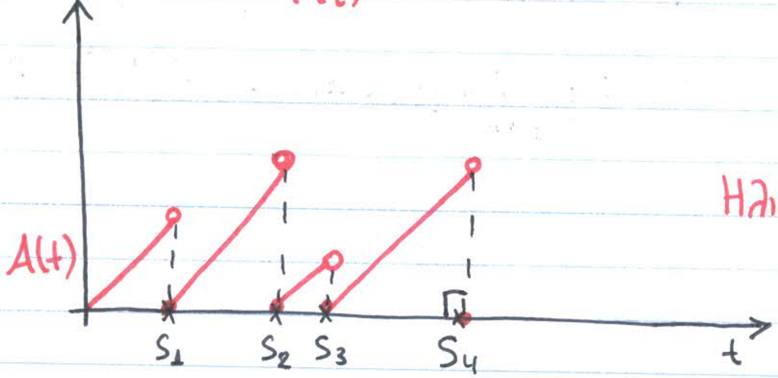
① Πλαίσιο

$\{N(t)\}$ αναν. διαδ. $X_1, X_2, \ldots$ ενδιαμ. χρόνοι $\sim F_X(t)$ συνεχής

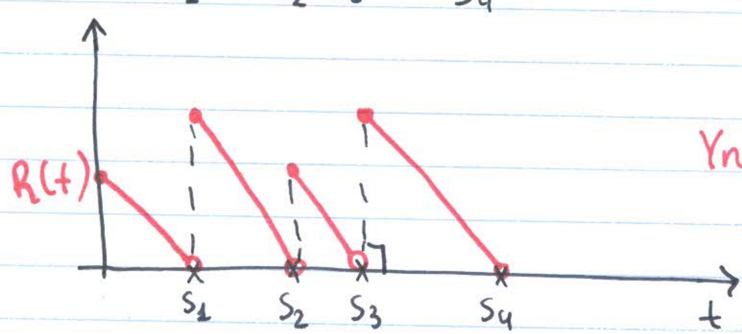
$E[(X_i)] = \mu < +\infty$, $Var[X_i] = \sigma^2 < +\infty$

S_n : χρόνος n-οστού γεγ.

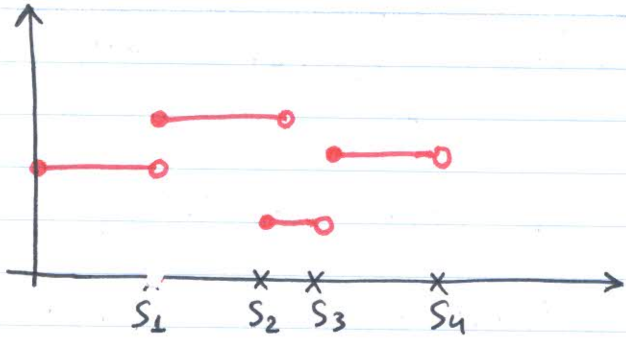




Ηλικία



Υπολ. χρόνος



Ολικος Χρονος

② Μελέτη της $E[R(t)]$

$E[R(t)]$: Ο μέσος χρόνος ως το επόμενο γεγονος την στιγμή t

$\lim_{t \to +\infty} E[R(t)]$: Οριακος μέσος χρόνος ως το επόμενο γεγονός την στιγμή t.

$$h(t) = E[R(t)] = \int_0^{+\infty} E[R(t) \mid S_1 = u]\, dF_X(u)$$

$$\bullet\ E[R(t) \mid S_1 = u] = \begin{cases} u - t & , u > t \\ h(t-u) & , u < t \end{cases}$$

Άρα $$h(t) = \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u) + \underbrace{\int_t^{+\infty} (u-t)\, dF_X(u)}_{d(t)}$$

Έχω $$d(t) = \int_t^{+\infty} (u-t)\, dF_X(u) = \int_t^{+\infty} \int_t^u dy\, dF_X(u) =$$

$$= \underbrace{\int_t^{+\infty} \int_y^{+\infty}}_{\text{συν. επιβ.}} dF_X(u)\, dy = \int_t^{+\infty} (1 - F_X(y))\, dy$$

$$\left[\cdot\int_y^{+\infty} dF_X(y) = \int_y^{+\infty} f_X(u)\,du = P(X>y) = 1-F_X(y)\right]$$

λυση της αναν. εξίσωσης:

$$h(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u)\, d\, m_X(u) \Rightarrow$$

$$E[R(t)] = \int_t^{+\infty}(1-F_X(y))\,dy + \int_0^t \int_{t-u}^{+\infty}(1-F_X(y))\,dy\, dm_X(u).$$

Θα υπολογίσω το $\lim_{t\to+\infty} h(t)$ με το Β.ΑΘ.

$$d(t) = \underbrace{\int_t^{+\infty}(1-F_X(y))\,dy}_{d_1(t)} - \underbrace{0}_{d_2(t)}$$

$d_1, d_2 \geq 0$, $\searrow$, + φραγμένη αφού
$d(t) = d_1(t) \leq d(0) = \mu < +\infty$

και $$\int_0^{+\infty} |d(t)|\,dt = \int_0^{+\infty} d(t)\,dt = \int_0^{+\infty}\int_t^{+\infty}(1-F_X(y))\,dy\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_t^{+\infty}\int_y^{+\infty} dF_X(u)\,dy\,dt =$$

$0<t<y<u$ $$= \int_0^{+\infty}\int_0^u \underbrace{\int_0^y dt}_{=y}\,dy\, dF_X(u) =$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^u y\,dy\,dF_X(u) = \int_0^{+\infty} u^2/2\, dF_X(u) =$$

$$= \frac{E[X^2]}{2} = \frac{Var[X] + (E[X])^2}{2} = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2} < +\infty$$

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις για το Β.Α.Θ.
άρα:

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} E[R(t)] = \frac{\int_0^{+\infty} d(t)\, dt}{\mu} = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu} = \frac{\mu}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu}}$$

Ανανεωτικό παράδοξο:
Ο οριακός μέσος υπολειπόμενος χρόνος είναι μεγαλύτερος (ή ίσος) από το μισό μέσο ενδιάμεσο χρόνο αναν

③ Μελέτη της $P(R(t) > x)$

Συνάρτηση επιβίωσης της $R(t) := P(R(t) > x)$

Έστω $x > 0$ σταθερό.
$h(t) = P(R(t) > x)$. Εφαρμόζω αναν. συλλογισμό.

$$h(t) = \int_0^{+\infty} P(R(t) > x \mid S_1 = u]\, d F_X(u)$$

- $$P(R(t) > x \mid S_1 = u) = \begin{cases} 1 & \text{αν } u-t > x, u > t \\ 0 & \text{αν } u-t \leq x, u > t. \\ h(t-u) & u \leq t \end{cases}$$

$$P(R(t) = u-t > x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } u-t > x \\ 0 & \text{αν } u-t \leq x \end{cases}$$

Άρα
$$P(R(t)>x \mid S_1=u) = \begin{cases} 1 & u>t+x \\ 0 & t<u\le t+x \\ h(t-u) & u\le t. \end{cases}$$

Άρα
$$h(t) = \underbrace{\int_{t+x}^{+\infty} 1\, dF_X(u) + \cancel{\int_{t}^{t+x} 0\, dF_X(u)}}_{d(t)} \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u)$$

- Ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$ και

$$d(t) = 1 - F_X(t+x)$$

- Λύση της ανάν. εξίσωσης

$$P(R(t)>x) = h(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u)\, dm_X(u)$$
$$= 1 - F_X(t+x) + \int_0^t 1 - F_X(t-u+x)\, dm_X(u)$$

- Για το $\lim\limits_{t\to+\infty} P(R(t)>x) = \lim\limits_{t\to+\infty} h(t)$

Ελέγχω τις συνθήκες: $d(t)\ge 0$, $\searrow$, φραγμένη αφού $d(t) \le d(0) = 1 - F_X(x)$ και

$$\int_0^{+\infty} |d(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} d(t)\, dt = \int_0^{+\infty} 1 - F_X(x+t)\, dt =$$

$$\int_x^{+\infty} 1 - F_X(y)\, dy < \int_0^{+\infty} (1 - F_X(y))\, dy = \mu < +\infty$$

Άρα ισχύει το Β.Α.Θ και έχουμε:

$$\lim_{t\to+\infty} P(R(t)>x) = \frac{\int_0^{+\infty} d(t)\,dt}{\mu} = \frac{\int_x^{+\infty} (1-F_X(y))\,dy}{\mu}$$

Άρα $\lim_{t\to+\infty} P(R(t)\le x) = 1 - \frac{\int_x^{+\infty}(1-F_X(y))\,dy}{\mu}$

οριακή κατανομή

$$= \frac{\int_0^{x} (1-F_X(y))\,dy}{\mu}$$

④ Κατανομή ισορροπίας

Αν $F_X(t)$: συνεχής σ.κ. μιας μη-αρνητικής τ.μ. X ορίζω την αντίστοιχη κατανομή ισορροπίας

$$F_e(t) = \frac{\int_0^{x}(1-F_X(y))\,dy}{\mu} \quad \text{οπου } \mu = E[X].$$

Δεν χρειάζεται να τα μάθεις απ' έξω

Αντιστοιχία

X ενδιάμεσος χρόνος ανανεώσεων $\longrightarrow$ X_e οριακός υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης

σ.κ.: $F_X(x) \longrightarrow F_e(x) = \frac{\int_0^{x}(1-F_X(y))\,dy}{\mu}$

$E[X]=\mu \longrightarrow \boxed{E[X_e] = \frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu}}$

$f_X(z)$ σ.π.π. $\longrightarrow f_e(x) = \frac{1-F_X(x)}{\mu}$

$\tilde{F}_X(s)$ μετασχ. L-S $\longrightarrow \tilde{F}_{X_e}(s) = \frac{1-\tilde{F}_X(s)}{\mu s}$

- $\tilde{F}_{X_e}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\, dF_e(x) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f_e(x)\, dx =$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-sx} \frac{1-F_X(x)}{\mu}\, dx = \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} e^{-sx} \int_x^{+\infty} dF_X(u)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\mu} \int_0^{+\infty}\int_0^{u} e^{-sx}\, dx\, dF_X(u) = \frac{1}{\mu}\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-su}}{s}\, dF_X(u) =$$

$$= \frac{1}{\mu s}\cdot\left(1-\tilde{F}_X(s)\right) = \frac{1-\tilde{F}_X(s)}{\mu s}$$

5 Ζεύγη X, X_e

- Αν $X = c$ σταθ. $\Rightarrow X_e \sim Unif([0,c])$
- Αν $X \sim \exp(\lambda) \Rightarrow X_e \sim \exp(\lambda)$
- Αν $X \sim Erlang(2,\lambda) \Rightarrow X_e \sim \begin{cases} Exp(\lambda) & \text{με πιθ. } 1/2 \\ Erlang(2,\lambda) & \text{με πιθ. } 1/2 \end{cases}$

6 Ηλικία, Ολικός Χρόνος.

$\{A(t) > x\} = \{$όχι γεγονότα στο $(t-x, t]\} = \{R(t-x) > x\}$

Άρα $P(A(t) > x) = P(R(t-x) > x)$

$$\lim_{t\to+\infty} P(A(t) > x) = \lim_{t\to+\infty} P(R(t-x) > x) = \lim_{t\to+\infty} P(R(t) > x)$$

! Οι οριακές κατανομές της ηλικίας και του υπολειπόμενου χρόνου ανανέωσης είναι ίδιες

$\{A(t) > x, R(t) > y\} = \{$όχι γεγονότα στο $(t-x, t+y)\}$

$= \{A(t+y) > x+y\} = \{R(t-x) > x+y\}$

Άρα $\lim\limits_{t \to +\infty} P(A(t) > x, R(t) > y) = \dfrac{\int_{x+y}^{+\infty} (1 - F_X(u))\, du}{\mu}$.

Διαδικασία Poisson

1) Ορισμός (Ανανεωτικός)

$\{N(t)\}$ στοχ. διαδ. Poisson με ρυθμό λ
$\Longleftrightarrow$ $\{N(t)\}$ αναν. διαδ. με κατ.
ενδ. χρόνων $Exp(\lambda)$

2) Ορισμός (Μακροσκοπικά)

$\{N(t)\}$ στοχ. διαδ. Poisson με ρυθμό λ
$\Longleftrightarrow$ $\{N(t)\}$ απαριθμήτρια και

1) Ανεξάρτητες προσαυξήσεις
$\forall t_1 < \dots < t_n$: $N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ ανεξάρτητες

2) Ομογ. προσαυξήσεις
$\forall t, s$ $N(t+s) - N(s) = \#$ γεγονότων στο $(s, s+t]$ έχει καταν. ανεξ. του s.

3) $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$
$$P(N(t) = k) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad k = 0, 1, \dots$$

3) Ορισμός (Τοπικός)

$\{N(t)\}$ στοχ. διαδ. Poisson με ρυθμό λ
$\Longleftrightarrow$ $\{N(t)\}$ απαριθμήτρια και

1) Ανεξάρτητες προσαυξήσεις
2) Ομογ. προσαυξήσεις

3)

$$P(N(h)=k) = \begin{cases} 1-\lambda h + o(h) & k=0 \\ \lambda h + o(h) & k=1 \\ o(h) & k \geq 2 \end{cases}$$

$o(h)$ συν. με $\lim_{h \to 0^+} \frac{o(h)}{h} = 0$.

4) Βασικοί υπολογισμοί

Έστω $\{N(t)\}$ διαδ. Poisson με ρυθμό λ κατα τον ανανεωτικό ορισμό.

Erlang(k,λ) → S_k = χρονος k-οστου γεγονότος.

$$F_{S_k}(t) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\lambda t} (\lambda t)^i / i! =$$

$$= \int_0^t \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x} \, dx$$

$$P_k(t) = P(N(t)=k) = P(S_k \leq t < S_{k+1}) =$$
$$= P(S_k \leq t) - P(S_{k+1} \leq t) =$$
$$= e^{-\lambda t} (\lambda t)^k / k!$$

$$m(t) = E[N(t)] = \lambda t$$

5) Ισοδυναμία των ορισμών

- Ανανεωτικος ⇒ Μακροσκοπικός

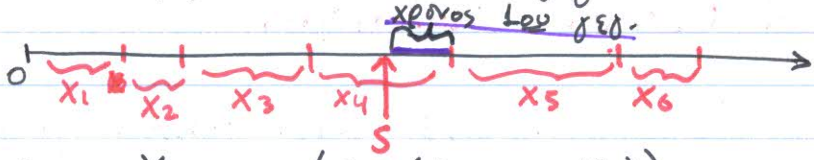
$\{N(t)\}$ έχει ανεξ. $Exp(\lambda)$ ενδ. χρον. $X_1, X_2, \ldots$
τοτε $\{N(u) : 0 \leq u \leq s\}$, ← το παρελθον του s

το μέλλον μετα το s. → $\{N_s(u) = N(s+u) - N(s) : u \geq 0\}$

Αν $N(s) = k$ η $\{N(u) : 0 \leq u \leq s\}$

προσδιορίζεται απο $X_1, X_2, \dots, X_k$ και
$\{ X_1 + \dots + X_k + X_{k+1} > s \} =$
$= \{ X_{k+1} > s - (X_1 + \dots + X_k) \}$

Η $\{N_s(u) : u \ge 0\}$ προσδιορίζεται απο τον χρονο του $1^{ου}$ γεγον. που είναι



το $X_{k+1} - (s - (X_1 + \dots + X_k))$ και τους μελλοντικους ενδιάμ. χρόνους X_{k+2}, $X_{k+3}, \dots$

Έχω οτι η $\{N_s(u) : u \ge 0\}$ είναι ανεξάρτητη της $\{N(u) : 0 \le u \le s\}$ διοτι
$X_{k+1} - (s - (X_1 + \dots + X_k)) \mid X_1, \dots, X_k, X_{k+1} > s - (X_1 + \dots + X_k)$ ← δεσμευση
έχει κατανομή $Exp(\lambda)$
(αμνήμονη ιδιοτητα).

Αρα η 1) του Μακροσκοπικου ορισμου ισχυει (ανεξ. προσαυξ.)
Επίσης, η $N(t)$ και η $N_s(t)$ είναι ισονομες δηλ η $N(s+t) - N(s)$ είναι ισονομη με την $N(t)$ $\forall s, t$ άρα ισχυει και η 2) του Μακρ. ορισμού.
Η 3) ισχυει απο τα βασικά υπολογιστικά αποτελέσματα.

▶ Μακροσκοπικός ⇒ Ανανεωτικός.

· Έχω $\{N(t)\}$ για την οποία ισχύουν τα **1)**, **2)**, **3)** του Μακροσκοπικού ορισμού.
· Έστω $X_1, X_2, \dots$ οι ενδιάμ. χρόνοι γεγονότων.

$$P(X_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t} \quad \text{άρα}$$
$$X_1 \sim Exp(\lambda).$$

$$P(X_{k+1} > t \mid X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) =$$

$$P\left[\begin{array}{c} N(t + x_1 + \dots + x_k) = \\ = k \end{array} \middle| \begin{array}{ll} N(t) = 0 & t \in [0, x_1) \\ N(t) = 1 & t \in [x_1, x_1 + x_2) \\ \vdots & \\ N(t) = k-1 & t \in [x_1 + \dots + x_{k-1}, x_1 + \dots + x_k) \\ N(x_1 + \dots + x_k) = k & \end{array} \right] =$$

$$P(N(t + x_1 + \dots + x_k) = k \mid N(x_1 + \dots + x_k) = k) =$$
$$P(N_{x_1 + \dots + x_k}(t) = 0) = e^{-\lambda t} \quad \text{άρα}$$

X_{k+1} ανεξάρτητη των $X_1, \dots, X_k$ και
$X_{k+1} \sim exp(\lambda)$.

▶ Μακροσκοπικός ⇒ Τοπικός

(Τα **1)**, **2)** αφήνονται) Έστω ότι ισχύουν τα **1)**, **2)**, **3)** του Μακροσκοπικού ορισμού·
αρκεί ν.δ.ο. ισχύει η **3)** του τοπικού.

$$P(N(h) = 0) = e^{-\lambda h} \overset{\text{αναπ. Taylor}}{=} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda h)^i}{i!} = 1 - \lambda h + o(h)$$

$$P(N(h) = 1) = e^{-\lambda h} \cdot \lambda \cdot h = (1 + o(h))\lambda h =$$
$$\lambda h + o(h), \; h \to 0^+$$

$$P(N(h)=k) = e^{-\lambda h}\frac{(\lambda h)^k}{k!} = o(h)$$
$k \geq 2$

▶ Τοπικός $\Rightarrow$ Μακροσκοπικός

Κοιτάμε την εξέλιξη της $\{N(t)\}$ στο $[0, t+h] = [0,t] \cup (t, t+h]$ οπότε

$$P(N(t+h)=0) = P(N(t)=0, N(t+h)-N(t)=0)$$
$$\overset{\text{ανεξ.}}{=} P(N(t)=0)\cdot P(N(t+h)-N(t)=0) \quad (\mathrm{I})$$

· Έστω $p_k(t) =: P(N(t)=k) \quad k=0,1,\ldots, t\geq 0$

Η (I) δίνει ότι $p_0(t+h) \overset{\text{ομογ.}}{=} p_0(t)\,p_0(h) \Rightarrow$

$$p_0(t+h) = p_0(t)\cdot(1-\lambda h+o(h)) \quad h\to 0^+ \Rightarrow$$

$$\frac{p_0(t+h)-p_0(t)}{h} = -\lambda p_0(t) + \frac{o(h)}{h} \overset{h\to 0^+}{\Longrightarrow}$$

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t) \Rightarrow p_0(t) = c\cdot e^{-\lambda t}$$

Όμως $p_0(0)=1 \Rightarrow c=1 \Rightarrow p_0(t) = e^{-\lambda t}$

Άρα για $k=0$ ισχύει αυτό που θέλουμε

Με την ίδια λογική έχουμε: $k\geq 1$

$$p_k(t+h) = p_k(t)\cdot p_0(h) + p_{k-1}(t)\,p_1(h) + \ldots + \underbrace{\sum_{i=2}^{k} p_{k-i}(t)\,p_i(h)}_{o(h)}$$

$$\Rightarrow \frac{p_k(t+h)-p_k(t)}{h} = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + \frac{o(h)}{h}$$

$$p_k'(t) = -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) \quad k\geq 1$$

$$\Rightarrow p_k'(t) + \lambda p_k(t) = \lambda p_{k-1}(t) \Longrightarrow$$

$$\left(e^{\lambda t} p_k(t)\right)' = \lambda e^{\lambda t} p_{k-1}(t) \Longrightarrow$$

$$e^{\lambda t} p_k(t) = \int_0^t \lambda e^{\lambda u} p_{k-1}(u)\, du \Longrightarrow$$

$$p_k(t) = e^{-\lambda t} \int_0^t \lambda e^{\lambda u} p_{k-1}(u)\, du \qquad k \geq 1.$$

Θ.δ.ο. $p_k(t) = e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^k / k! \quad k \geq 0$ με επαγωγή στο k.

Για $k=0$ ισχύει. Έστω ότι ισχύει για $k-1$ δηλαδή $p_{k-1}(u) = e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^{k-1}}{(k-1)!}$

τότε:

$$p_k(t) = e^{-\lambda t} \int_0^t \lambda \cancel{e^{\lambda u}} \cancel{e^{-\lambda u}} \frac{(\lambda u)^{k-1}}{(k-1)!}\, du =$$

$$e^{-\lambda t} \int_0^t \frac{\lambda^k}{(k-1)!} u^{k-1}\, du =$$

$$e^{-\lambda t} \lambda^k / (k-1)! \cdot t^k / k = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

6) Άσκηση

$\{N(t)\}$: στοχ. διαδ. Poisson με ρυθμό λ

$(N(s) \mid N(t)=n) \sim\ ;$ $\quad (s<t)$

$$P(N(s)=k \mid N(t)=n) = \frac{P(N(s)=k;\ N(t)=n)}{P(N(t)=n)} =$$

$$\frac{P(N(s)=k,\ N(t)-N(s)=n-k)}{P(N(t)=n)} =$$

ΟΧΙ

$$\cancel{\frac{P(N(s)=k,\ N(t-s)=n-k)}{P(N(t)=n)}}$$

αν και ισονομες ~~δεν~~ αντικαταστώ στην τομή

$$\overset{\text{ανεξ.}}{=} \frac{P(N(s)=k)\,P(N(t)-N(s)=n-k)}{P(N(t)=n)} \overset{\text{ομογ. προσ.}}{=}$$

εδώ αντικαταστώ

$$\frac{P(N(s)=k)\cdot P(N(t-s)=n-k)}{P(N(t)=n)} =$$

$$\frac{e^{-\lambda s}\,(\lambda s)^k/k!\ \ e^{-\lambda(t-s)}\,(\lambda(t-s))^{n-k}/(n-k)!}{e^{-\lambda t}\,(\lambda t)^n/n!} =$$

$$= \binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k} \qquad 0 \le k \le n$$

(Διωνυμική)

$$\Rightarrow (N(s) \mid N(t)=n) \sim Bin(n, s/t)$$