Διαδικασία Poisson
Θεώρημα Campbell

1) Ερώτημα

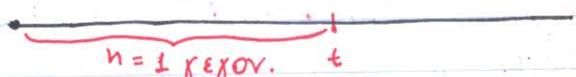
Δεσμευμένη κατανομή των χρόνων των γεγονότων μιας στοχ. διαδ. Poisson αν ξέρουμε ότι έγιναν n γεγονότα σε διάστημα μήκους t

$\{N(t)\}$ στοχ. διαδ. Poisson με ρυθμό λ

$S_1, S_2, \dots$ χρόνοι γεγον.

$$(S_1, \dots, S_n \mid N(t) = n) \sim \;;$$

2) Απάντηση για $n = 1$:



Διαίσθηση: $S_1 \sim \text{Uniform}((0,t])$

$$(S_1 \mid N(t) = 1) \sim \text{Uniform}((0,t])$$

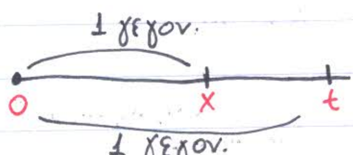
Πράγματι, έχω:

$$F_{S_1 \mid N(t)=1}(x) = P(S_1 \le x \mid N(t) = 1)$$

$$x < 0 \to F_{S_1 \mid N(t)=1}(x) = 0$$

$$x > t \to F_{S_1 \mid N(t)=1}(x) = 1$$

$$0 \le x \le t \to F_{S_1 \mid N(t)=1}(x) = P(N(x) \ge 1 \mid N(t) = 1)$$



$$\underset{0 \le x \le t}{=} P(N(x) = 1 \mid N(t) = 1) = \frac{P(N(x) = 1, N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)} = \frac{P(N(x) = 1, N(t) - N(x) = 0)}{P(N(t) = 1)} =$$

$(0,x], (x,t]$ ξένα ⟹ ανεξ. προσαυξ.

$$\frac{P(N(x)=1)\cdot P(N(t)-N(x)=0)}{P(N(t)=1)}$$ ομογ. προσ.

$$\frac{P(N(x)=1)\cdot P(N(t-x)=0)}{P(N(t)=1)}$$ $N(t)\sim Poisson(\lambda t)$

$$\frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^1/1!\ \ e^{-\lambda(t-x)}(\lambda(t-x))^0/0!}{e^{-\lambda t}\cdot(\lambda t)^1/1!}=\frac{x}{t}$$

Τελικά $F_{S_1|N_1(t)=1}(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x/t & 0\le x\le t\\ 1 & x>t\end{cases}$

3) Απάντηση για γενικό n

Θεώρημα Campbell: $\{N(t)\}$: διαδ. Poisson με ρυθμό λ και $S_1, S_2, \dots$ χρονοι γεγον. τότε $(S_1, S_2, \dots, S_n \mid N(t)=n) \overset{d}{=} (U_{1:n}, \dots, U_{n:n})$
οπου $U_{i:n}$: i-οστή διατεταγμένη τ.μ. απο τυχαίο δείγμα (ανεξ. + ισόνομες) n Uniform$((0,t])$ $U_1, \dots, U_n$

4) Διατεταγμένες τ.μ.

$(X_1, \dots, X_n)$ τυχαίο διάνυσμα ορίζω $X_{i:n}$: η i-οστή μικρότερη απο τις $X_1, \dots, X_n$

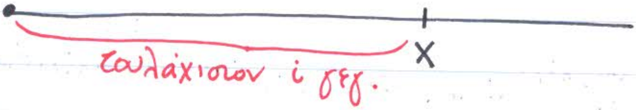
Αν δίνεται η $F_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ να βρεθεί η $F_{(X_{1:n},\dots,X_{n:n})}(x_1,\dots,x_n)$.

Για $X_1, \dots, X_n$ ανεξ. και ισόνομες είναι σχετικά εύκολο.

5) Κατανομή $X_{i:n}$ για $X_1, \dots, X_n$ ανεξ + ισον.

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim F(x)$ σ.κ.
$f(x)$ σ.π.π. (συνεχείς)

• $F_{X_{i:n}}(x) = P(X_{i:n} \le x) =$



$= P($τουλάχιστον i από τις $X_1, \dots, X_n$ είναι $\le x) =$

$= \sum_{k=i}^{n} P($ακριβώς k από τις $X_1, \dots, X_n$ να είναι $\le x)$

$= \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} F(x)^k \cdot (1 - F(x))^{n-k}$

Διωνυμική κατανομή όπου επιτυχία είναι να "πέσει" κάτω από το x ($\le x$)

• $f_{X_{i:n}}(x) = F'_{X_{i:n}}(x) =$

$\lim_{\delta x \to 0^+} \dfrac{P(x \le X_{i:n} \le x + \delta x)}{\delta x} =$

$\lim_{\delta x \to 0^+} \dfrac{\binom{n}{i-1}\binom{n-i+1}{1} F(x)^{i-1} (F(x+\delta x) - F(x)) \cdot (1-F(x+\delta x))^{n-i}}{\delta x}$

όχι τουλ. 1 αφού το διάστημα είναι απειροστό και άρα η πιθ. να πέσουν 2 και πάνω είναι $o(\delta x)$

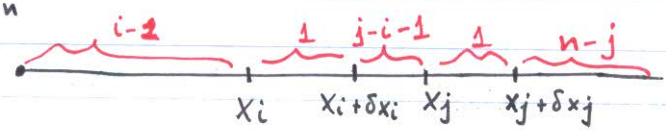
$= \dfrac{n!}{(i-1)!\,1!\,(n-i)!} (F(x)^{i-1} \cdot f(x) (1 - F(x))^{n-i})$

Άρα $F_{X_{i:n}}(x) = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} (F(x))^k (1-F(x))^{n-k}$

$\rightarrow f_{X_{i:n}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!} (F(x))^{i-1} f(x)\,(1-F(x))^{n-i}$

$f_{X_{i:n},X_{j:n}}(x_i, x_j) = \;;$

$1 \le i < j \le n$



$$f_{X_{i:n},X_{j:n}}(x_i, x_j) = \frac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)!} \cdot (F(x_j))^{i-1} f(x_i) (F(x_j)-F(x_i))^{j-i-1} f(x_j) \cdot (1-f(x_j))^{n-j}$$

$\rightarrow f_{X_{1:n},\dots,X_{n:n}}(x_1,\dots,x_n) = n!\, f(x_1)\cdot \dots \cdot f(x_n) \qquad 0 \le x_1 \le \dots \le x_n$

6) Διατεταγμένες τ.μ. από τ.δ. ομοιόμορφων

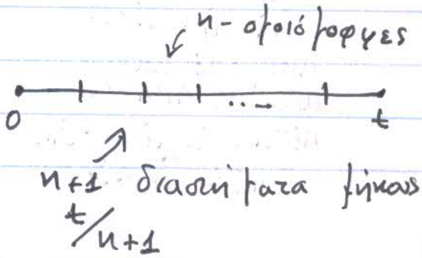
$U_1, \dots, U_n$ ανεξ. $\sim$ Uniform$((0,t])$

$$f_{U_{i:n}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!\,1!\,(n-i)!} \left(\frac{x}{t}\right)^{i-1} \cdot \left(\frac{1}{t}\right) \cdot (1 - x/t)^{n-i} \qquad x \in (0,t]$$

$$= \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!} \, \frac{x^{i-1}\,(t-x)^{n-i}}{t^n} \qquad x \in (0,t]$$

$\rightarrow f_{U_{1:n},\dots,U_{n:n}}(x_1,\dots,x_n) = n! \cdot 1/t^n \qquad 0 \le x_1 \le \dots \le x_n \le t$

$\rightarrow E(U_{i:n}) = \frac{i \cdot t}{n+1}$



Πράγματι, $E(U_{i:n}) = \int_0^t x f_{U_{i:n}}(x)\,dx =$

$$= \frac{n!}{(n-i)!(i-1)!\,t^n}\int_0^t x^i (t-x)^{n-i}\,dx \overset{x/t=u}{=\!=}$$

$$\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!\,t^n}\int_0^1 (ut)^i\, t^{n-i}(1-u)^{n-i}\, t\cdot du =$$

$$\frac{n!\,t}{(i-1)!(n-i)!}\cdot \underbrace{\int_0^1 u^i(1-u)^{n-i}\,du}_{=B(i+1,\,n-i+1).} \qquad (I)$$

συνάρτηση B $\rightarrow$ $B(a,b)=\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du$

$$\| $$

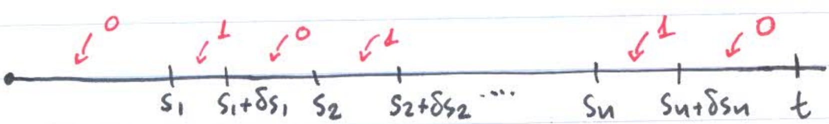
$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \xrightarrow{a,b:\text{ακέραια}} \frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!}$$

$$(I) = \frac{n!\,t}{(i-1)!\cancel{(n-i)!}}\cdot\frac{i!\,\cancel{(n-i)!}}{(n+1)!} = \frac{i\cdot t}{n+1}.$$

7) Απόδειξη Θ. Campbell

$$f_{S_1,S_2,\dots,S_n|N(t)=n}(s_1,\dots,s_n) \underset{s_1<\dots<s_n}{=}$$

$$= \lim_{\delta s_1,\delta s_2,\dots,\delta s_n\to 0^+}\frac{P[s_1<S_1\le s_1+\delta s_1,\ \dots,\ s_n<S_n<s_n+\delta s_n,\ N(t)=n]}{\delta s_1\cdot\delta s_2\cdot\ldots\cdot\delta s_n\ P(N(t)=n)} =$$

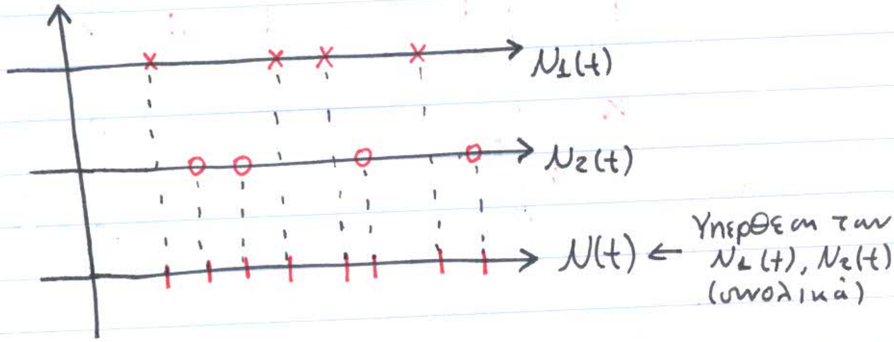


$$= \lim_{\delta s_1 \dots \delta s_n \to 0^+} \frac{e^{-\lambda s_1} e^{-\lambda s_1} \cdot (\lambda \delta s_1) e^{-\lambda(s_2 - s_1 - \delta s_1)} \cdot \dots}{\delta s_1 \cdot \dots \cdot \delta s_n \;\; e^{-\lambda t} \;\; (\lambda t)^n / n!}$$

$$= \lim_{\delta s_1 \dots \delta s_n \to 0^+} \frac{\cancel{e^{-\lambda t}} \, \lambda^n \cancel{\delta^n} \cdot \cancel{s_1} \, \cancel{s_2} \dots \cdot \cancel{s_n}}{\cancel{\delta s_1} \cdot \dots \cdot \cancel{\delta s_n} \, \cancel{e^{-\lambda t}} \;\; (\lambda t)^n / n!} = \frac{n!}{t^n}$$

Υπέρθεση και διάσπαση διαδικασιών Poisson

1) Υπέρθεση



$\{N_i(t)\}$ $i=1,\dots,r$ (r: πεπερασμένο ή άπειρο) απαριθμήτριες διαδικασίες τότε η $\{N(t)\}$ με

$$N(t) = \sum_{i=1}^{r} N_i(t)$$

λέγεται υπέρθεση των $N_i(t)$.

2) Θεώρημα:

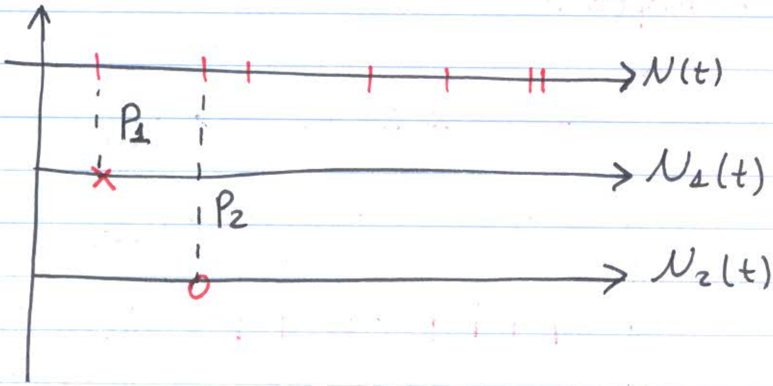
$\{N_i(t)\}$ $i=1,\dots,r$ διαδ. Poisson με ρυθμό λ_i, $i=1,\dots,r$ ανεξάρτητες τότε:

i) $\{N(t)\}$ υπέρθεση είναι στοχαστ. διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda = \sum \lambda_i$

ii) Αν Z_k είναι ο τύπος του i-οστού γεγονότος (δηλ. αν προήλθε από την k-οστή διαδ. Poisson $N_k(t)$ $1 \le k \le r$) τότε οι $Z_1, Z_2, \dots$ είναι ανεξ και ισόνομες και ισχύει:

$$P(Z_k = i) = \lambda_i / \lambda = \lambda_i \Big/ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i$$

3) Διάσπαση (Εκλέπτυνση - Thining)



$\{N(t)\}$ απαριθμήτρια διαδικασία και $Z_1, Z_2, \dots$ ανεξ και ισόνομες με $P(Z_k = i) = p_i \quad k = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, r$ τότε η $\{N_1(t), \dots, N_r(t) : t \geq 0\}$ με

$$N_i(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} 1_{\{Z_k = i\}}$$

λέγεται διάσπαση της $\{N(t)\}$ με πιθανότητες $p_1, p_2, \dots, p_r$

4) Θεώρημα:

Αν $\{N(t)\}$ στοχ. διαδ. Poisson ρυθμού λ και $Z_1, Z_2, \dots$ ανεξ και ισόνομες με $P(Z_k = i) = p_i$ τότε:

i) $\{N_i(t) : t \geq 0\}$ ανεξάρτητες

ii) $\{N_i(t) : t \geq 0\}$ σ.δ. Poisson με ρυθμό $\lambda \cdot p_i$

Ασκήσεις

5) Ασκηση: $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson με ρυθμό λ.
$S_1, S_2, \ldots$ οι χρονοι γεγονοτων.
i) $E[S_k \mid N(t)=n]$ $n=0,1,2,\ldots$
$k=1,2,\ldots$

ii) $E[S_1 \mid N(t)\geq 1]$

Απάντηση: i) ► <u>Βασική ιδέα:</u> E ή P που αφορά $S_1,\ldots,S_n$ δεδομένης κάποιας πληροφορίας για $N(t)$ τότε "πάμε" με Campbell

i) Για $k \leq n$:
$(S_k \mid N(t)=n) = U_{k:n}$ οπου
$U_{k:n}$ η k-οστή διατεταγμένη τ.μ. απο τ.δ. $U_1,\ldots,U_n \sim Uniform([0,t])$

Άρα $E[S_k \mid N(t)=n] = E[U_{k:n}] = \dfrac{k\cdot t}{n+1}$

Για $k > n$:
$$E[S_k \mid N(t)=n] = \underbrace{\frac{k-n}{\lambda}}_{\text{χρονος για τα υπολοιπα}} + \underbrace{t}_{\text{χρόνος για η γεγον.}}$$
(χρησιμοποιήσαμε αναγεννητικοτητα (αμνήμονη) ιδιότητα) της σ.δ. Poisson)

ii) 1ος τροπος: (Θ. Campbell)

$$E[S_1 \mid N(t)\geq 1] = \cancel{\sum_{k=0}^{+\infty} P(N(t)=k \mid N(t)\geq 1)\cdot}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(N(t)=k \mid N(t)\geq 1)\cdot E[S_1 \mid N(t)\geq 1, N(t)=k]$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{P(N(t)=k \mid \cancel{N(t)\geq 1})}{P(N(t)\geq 1)} \cdot E[S_1 \mid N(t)=k] =$$

για $k=0$ → η πιθ. είναι 0 οπότε παραλείπεται

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}\cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}}{1-e^{-\lambda t}} \cdot \frac{t}{k+1} =$$

$$\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda(1-e^{-\lambda t})} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda(1-e^{-\lambda t})}\left(e^{\lambda t}-1-\lambda t\right) =$$

$$\frac{1-e^{-\lambda t}-\lambda t e^{-\lambda t}}{\lambda(1-e^{-\lambda t})} = \frac{1}{\lambda} - t\,\frac{e^{-\lambda t}}{1-e^{-\lambda t}}$$

2ος τρόπος: $E[S_1 \mid N(t)\geq 1] = E[S_1 \mid S_1 \leq t] =$

$$\int_0^{+\infty} x\, f_{S_1 \mid S_1\leq t}(x)\,dx = \int_0^t x\,\frac{f_{S_1}(x)}{P(S_1\leq t)}\,dx =$$

$$= \int_0^t x\,\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda t}}\,dx = \frac{1}{\lambda(1-e^{-\lambda t})}\int_0^t \underbrace{\frac{\lambda^2 x}{(2-1)!}e^{-\lambda x}}_{\text{σ.π.π. Erlang}(2,\lambda)}\,dx =$$

$$\frac{1}{\lambda(1-e^{-\lambda t})}\cdot P(S_2\leq t) = \frac{P(N(t)\geq 2)}{\lambda(1-e^{-\lambda t})} =$$

$$= \frac{1-e^{-\lambda t}-\lambda t e^{-\lambda t}}{\lambda(1-e^{-\lambda t})}$$

3^{os} τρόπος :

Θ. Δεσμευμένης μέσης τιμής. $\rightarrow$ $E[S_1] = P(N(t)\geq 1)\, E(S_1 | N(t)\geq 1) + P(N(t)=0)\, E(S_1|N(t)=0) \Rightarrow$

$$1/\lambda = (1-e^{-\lambda t})\cdot E[S_1|N(t)\geq 1] + e^{-\lambda t}\,(t + 1/\lambda) \Longrightarrow$$

$$E[S_1|N(t)\geq 1] = \frac{1/\lambda - e^{-\lambda t}(t+1/\lambda)}{1-e^{-\lambda t}}.$$

6) Άσκηση: $\{N(t)\}$ α. διαδ. Poisson ρυθμού λ

$X \sim exp(\mu)$ ανεξ. της $\{N(t)\}$

$N = \#$ γεγ. της $\{N(t)\}$ στο $[0, X]$

$N \sim ;$

Απάντηση: 1^{os} τρόπος: $n \geq 0$. (N: διακριτή)

$$P(N=n) = \int_0^{+\infty} P(N=n|X=x)\cdot f_X(x)\, dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^n}{n!}\cdot \mu e^{-\mu x}\, dx =$$

$$\frac{\lambda^n \mu}{n!}\int_0^{+\infty} x^n e^{-(\lambda+\mu)x}\, dx =$$

$$\frac{\lambda^n \mu}{(\lambda+\mu)^{n+1}}\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{(\lambda+\mu)^{n+1}}{n!} x^n e^{-(\lambda+\mu)x}}_{\text{σ.π.π. Erlang}(n+1,\lambda+\mu)} dx = \frac{\lambda^n \mu}{(\lambda+\mu)^{n+1}}$$

Άρα $P(N=n) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{πιθ. επιτ.}}}{\frac{\mu}{\lambda+\mu}} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n \Longrightarrow$

$N \sim Geom$

2ος τρόπος: $X \sim exp(\mu) \rightarrow$ χρόνος του 1ου γεγονότος σε μια σ.δ. Poisson $\{N'(t)\}$ με ρυθμό μ ανεξάρτητη της $\{N(t)\}$

$P(N=n) = P[$Στην υπέρθεση των $N(t)$, $N'(t)$ τα γεγονότα $1, 2, \dots, n$ είναι τύπου $N(t)$ και το $n+1$ είναι τύπου $N'(t)] = P(Z_1=1) \cdot \ldots \cdot P(Z_n=1) \cdot P(Z_{n+1}=2)$

$= \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n \cdot \frac{\mu}{\lambda+\mu}$.

Διαδικασία Poisson
Ασκήσεις - Επεκτάσεις

1) Άσκηση

$\{N_i(t)\}$ διαδ. Poisson ρυθμού λ_i, $i=1,2$
$\{N(t)\}$ η υπέρθεση τους (ανεξάρτητες)

$$P(N_1(t)=k \mid N(t)=n) \qquad 0 \le k \le n$$
$$(N_1(t) \mid N(t)=n) \sim ;$$

Λύση: $P(N_1(t)=k \mid N(t)=n) =$

$$\frac{P(N_1(t)=k, N(t)=n)}{P(N(t)=n)} = \frac{P(N_1(t)=k, N_2(t)=n-k)}{P(N(t)=n)} =$$

$\{N_1(t)\}$, $\{N_2(t)\}$ ανεξάρτητες

$$\overset{\{N_1(t)\},\{N_2(t)\}\text{ ανεξάρτητες}}{=} \frac{P(N_1(t)=k)\cdot P(N_2(t)=n-k)}{P(N(t)=n)} =$$

$$\frac{e^{-\lambda_1 t}\,(\lambda_1 t)^k/k! \quad e^{-\lambda_2 t}\,(\lambda_2 t)^{n-k}/(n-k)!}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\,(\lambda_1+\lambda_2)^n t^n/n!} =$$

$$\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$$

Άρα $(N_1(t) \mid N(t)=n) \sim Bin\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$

2ος τρόπος: $P(N_1(t)=k \mid N(t)=n) =$
$P($Από τα n πρώτα γεγονότα της υπέρθεσης υπάρχουν k τύπου $1 \mid N(t)=n) =$
$= P($Από τις $Z_1, \dots, Z_n$ (τύποι) k από αυτές είναι $1) =$

$$= \binom{n}{k} P(Z_i=1)^k \cdot (1-P(Z_i=1))^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$$

2) Άσκηση

$\{N(t)\}$ στοχ. διαδ. Poisson με ρυθμό λ
$S_1, S_2, \ldots$ χρόνοι γεγονότων.
Μέσος χρόνος που συμβαίνει το τελευταίο γεγονός πριν τη στιγμή $t =$;
(τη στιγμή 0 θεωρούμε ότι υπάρχει γεγονός κατά σύμβαση)

Λύση: $E[S_{N(t)}] =$;

1ος τρόπος: $E[S_{N(t)}] = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N(t)=n)\cdot E[S_{N(t)} \mid N(t)=n] =$

$$= P(N(t)=0)\cdot 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} P(N(t)=n)\cdot E[S_n \mid N(t)=n] =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} P(N(t)=n)\cdot E(U_{n:n})$$ όπου $U_{n:n}$ η n-οστή διατεταγμένη από τ.δ. $U_1, \ldots, U_n \sim Unif([0,t])$

Θ. Campbell

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} P(N(t)=n)\cdot \frac{n\cdot t}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\,\frac{n t}{n+1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\cdot(k-1) =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\cdot k - \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right) =$$

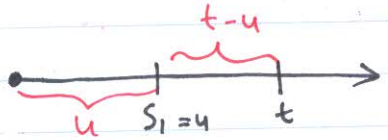
λόγω του $(k-1)$ δεν έχει σημασία το $k=1$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(\underbrace{E(N(t))}_{=\lambda t} - 1 + e^{-\lambda t}\right) = t - \frac{1}{\lambda} + \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}.$$

2ος τρόπος: Χρησιμοποιώ ανανεωτικό συλλογισμό

$$E[S_{N(t)}] = \int_0^{+\infty} E[S_{N(t)} \mid S_1 = u]\, d \underset{\substack{\uparrow \\ X \sim exp(\lambda)}}{F_X(u)}$$

$$E[S_{N(t)} \mid S_1 = u] = \begin{cases} 0, & u > t \\ u + E[S_{N(t-u)}], & u \leq t. \end{cases}$$



Άρα $h(t) = E[S_{N(t)}] = \int_0^t [u + h(t-u)]\, dF_X(u) + 0 =$

$$\int_0^t u\, dF_X(u) + \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u) \leftarrow \text{ανανεωτική εξίσωση.}$$

Λύση: $h(t) = d(t) + (d * m_X(t))$

$$d(t) = \int_0^t u\, dF_X(u) \overset{X \sim exp(\lambda)}{=\!=\!=} \int_0^t \lambda u e^{-\lambda u}\, du =$$

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^t \underbrace{\frac{\lambda^2}{(2-1)!} u^{2-1} e^{-\lambda u}}_{\Gamma\alpha\mu\mu\alpha(2,\lambda) := Erlang(2,\lambda)} du = \frac{1}{\lambda} P(S_2 \leq t) =$$

$$= 1/\lambda \cdot (1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t})$$

αφού $m_X(u) = \lambda u \Rightarrow \lambda du$

Άρα $h(t) = 1/\lambda (1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}) + \int_0^t d(t-u)\, \overbrace{dm_X(u)}^{\lambda du}$

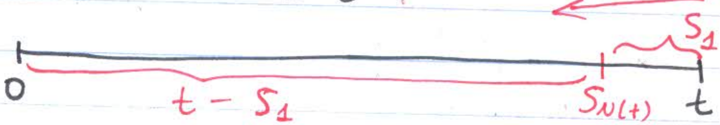
$$h(t) = 1/\lambda (1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}) + \lambda \int_0^t d(x)\, dx \Rightarrow$$

$$h(t) = 1/\lambda\,(1-e^{-\lambda t}-\lambda t e^{-\lambda t}) + \lambda\int_0^t 1/\lambda\,(1-e^{-\lambda x}-\lambda x e^{-\lambda x})\,dx =$$
$$= \dots = t - 1/\lambda + \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}$$

$3^{ος}$ τροπος:

$$E[S_{N(t)}] = \overbrace{P(N(t)=0)}^{e^{-\lambda t}}\cdot \overbrace{E[S_{N(t)} \mid N(t)=0]}^{0} + \underbrace{P(N(t)\geq 1)}_{1-e^{-\lambda t}}\, E[S_{N(t)} \mid N(t)\geq 1]$$

το βλέπω ανάποδα



$$\Rightarrow E[S_{N(t)}] = (1-e^{-\lambda t})\, E[\,t - S_1 \mid N(t)\geq 1] =$$
$$(1-e^{-\lambda t})\,(t - E[S_1 \mid N(t)\geq 1]) \quad (I)$$

ομως $\quad E[S_1] = P(N(t)=0)\cdot E[S_1 \mid N(t)=0] + P(N(t)\geq 1)\cdot E[S_1 \mid N(t)\geq 1] \Rightarrow$

$$1/\lambda = e^{-\lambda t}\cdot(t + 1/\lambda) + (1-e^{-\lambda t})\, E[S_1 \mid N(t)\geq 1]$$

Αρα $(I) \Rightarrow E[S_{N(t)}] = (1-e^{-\lambda t})t - 1/\lambda + e^{-\lambda t}(t + 1/\lambda)$

$$\Rightarrow E[S_{N(t)}] = t - 1/\lambda + e^{-\lambda t}/\lambda$$

3) Άσκηση

Γεννήσεις σε μαιευτήριο σύμφωνα με διαδ. Poisson ρυθμού $\lambda = 24$ γεν/ημέρα
Σήμερα είναι η $28^{η}$ Μαρτίου.

i) Π.Θ. 10 γεννήσεις σήμερα;

ii) Π.Θ. 10 γεννήσεις αύριο δεδομένου 30 γεννήσεις σήμερα

iii) Αναμενόμενη ώρα γέννησης του $3^{ου}$ παιδιού χθές δεδομένου οτι είχαμε 11 γεννήσεις χθές

iv) Π.Θ. 100 γεννήσεις απο 28-31 Μαρτίου δεδομένου οτι αύριο έχουμε 30 γεννήσεις

v) Π.Θ. 15 γεν. χθές 9 αγόρια και 6 κορίτσια

vi) Π.Θ. 10 γεν. χθές
A A A K A K K K A A.

vii) Π.Θ. 5 γεν. αγοριών χθές δεδομένου 30 γεν. χθές και σήμερα

Λύση: Μεσάνυχτα $26^{ης}$-$27^{ης}$ Μαρτίου είναι η χρον. στιγμή 0 (γιατί έχουμε ερωτήματα με "χθές", για ευκολία)
Ο χρόνος μετριέται σε ημέρες.
$\{N(t)\}$ διαδ. γεννήσεων
$\{N_1(t)\}$: αγόρια
$\{N_2(t)\}$: κορίτσια

$Z_1, Z_2, \dots$ οι τ.μ. που δείχνουν τους τύπους της γέννησης (αγόρι - κορίτσι)

i) $P(\underset{\text{σήμερα}}{N(2)} - \underset{\text{χθες}}{N(1)} = 10) \xlongequal{\text{ομογ. προσ.}} P(N(1)=10) = e^{-24 \cdot 1} (24 \cdot 1)^{10}/10!$

ii) $P(N(3)-N(2)=10 \mid N(2)-N(1)=30) \xlongequal{\text{ανεξ. προσ.}} P(N(3)-N(2)=10) = P(N(1)=10)$

iii) $E[S_3 \mid N(1)=11] = E[U_{3:11}] = \frac{3 \cdot 1}{11+1} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \rightarrow$ 6 π.μ. χθες

iv) $P(N(5)-N(1)=100 \mid N(3)-N(2)=30) =$

δεν έχω ανεξάρτητα διαστήματα για να χρησ. ανεξαρτ. προσαυξ.

$$= \frac{P(N(5)-N(1)=100,\ N(3)-N(2)=30)}{P(N(3)-N(2)=30)} =$$

$$\frac{P(30 \text{ γενν. στο } (2,3] \text{ και } 70 \text{ στο } (1,2] \cup (3,5])}{P[N(3)-N(2)=30]} \xlongequal{\text{ανεξ. προσ.}}$$

$$\frac{\cancel{P(30 \text{ γεν. στο } (2,3])} \cdot P(70 \text{ στο } (1,2] \cup (3,5])}{\cancel{P(30 \text{ γεν στο } (2,3])}}$$

$$= P(N(\underset{\text{σύνολο 3 μέρες}}{3}) = 70) = e^{-24 \cdot 3} (24 \cdot 3)^{70}/70!$$

v) $P(N_1(1) = 9, N_2(1) = 6) \underset{\text{ανεξαρτ.}}{=}$
$P(N_1(1) = 9) \cdot P(N_2(1) = 6) =$
$e^{-24 \cdot 1/2 \cdot 1} \cdot (12)^9 / 9! \cdot e^{-12} (12)^6 / 6!$

Αλλιώς, $P(N(t) = 15$ και 9 από τις $Z_1, \ldots, Z_{15}$ είναι αγόρια$) = e^{-24} \frac{24^{15}}{15!} \binom{15}{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(\frac{1}{2}\right)^6$