Ασκήσεις και επεκτάσεις της διαδικασίας Poisson

1) Μη-ομογενής διαδ. Poisson

Ορισμός (Τοπικός): $\{N(t)\}$ απαριθμήτρια σ.δ. λέγεται μη-ομογενής διαδ. Poisson με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t)$ αν:

i) Ανεξάρτητες προσαυξήσεις

ii) $P(N(t+h) = j+n \mid N(t)=j) =$

$$= \begin{cases} 1-\lambda(t)h + o(h) & , n=0 \\ \lambda(t)h + o(h) & , n=1 \\ o(h) & , n\geq 2 \end{cases}$$

Ορισμός (Μακροσκοπικός): $\{N(t)\}$ απαριθμήτρια σ.δ. λέγεται μη-ομογενής διαδ. Poisson με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t)$ αν:

i) Ανεξάρτητες προσαυξήσεις

ii) Η τ.μ. $N_s(t) = N(t+s) - N(s) =$ # γεγονότων στο $(s, s+t]$ είναι Poisson$\left(\int_s^{s+t} \lambda(u)du\right)$

Συνήθως, συμβολίζουμε:

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)\, du$$

2) Μη-ομογενής διάσπαση διαδ. Poisson

Θεώρημα: $\{N(t)\}$ στοχ. διαδ. Poisson με ρυθμό λ (ομογενής) και κάθε γεγονός που συμβαίνει τη στιγμή t καταγράφεται ως τύπου 1 με πιθ. $p(t)$* τότε η διαδικασία $\{N_1(t)\}$ που καταγράφει τα γεγον. τύπου 1 είναι μη-ομογενής διαδ. Poisson ρυθμού $\lambda \cdot p(t)$

*ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα

Απόδειξη: Με τον τοπικό ορισμό:

i) Προφανές

ii) $P(N_1(t+h) = j+n \mid N_1(t) = j) =$

$P($m γεγ. στην $\{N(t)\}$ στο $(t, t+h]$ εκ των οποίων καταγράφονται ως τύπου 1 τα $n) =$

$$= \begin{cases} \overbrace{(1-\lambda h)}^{\text{κανένα στην } N(t)} + \overbrace{\lambda h}^{\text{ένα } N(t)} \cdot \overbrace{(1-p(t))}^{\text{δεν καταγράφεται}} + o(h) & , n=0 \\ \overbrace{\lambda h \cdot p(t)}^{\text{ένα στην } N(t),\ \text{καταγράφεται}} + o(h) & , n=1 \\ o(h) & , n \geq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \lambda p(t) \cdot h + o(h) & , n=0 \\ \lambda h p(t) + o(h) & , n=1 \\ o(h) & , n \geq 2 . \end{cases}$$

3) Σύνθετη διαδ. Poisson

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson με ρυθμό λ και
$Y_1, Y_2, \dots$ ανεξ + ισόνομες με κατανομή
$F_Y(y)$ τότε η $\{Y(t)\}$ με

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

λέγεται σύνθετη διαδ. Poisson

4) Άσκηση

$\{N(t)\}$ μη-ομογενής διαδ. Poisson με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t)$.
S_n : ο χρόνος του n-οστού γεγ.

i) $F_{S_n}(t) = P(S_n \le t) = ;$

ii) $f_{S_n}(t) = ;$

iii) $F_{S \mid N(t)=1}(x) = ;$

Λύση: i) $F_{S_n}(t) = P(S_n \le t) = P(N(t) \ge n)$

$$N(t) \sim \text{Poisson}\Big(\underbrace{\int_0^t \lambda(u)\,du}_{\Lambda(t)}\Big)$$

$$F_{S_n}(t) = \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^k}{k!}$$

(ii) $f_{S_n}(t) = F'_{S_n}(t) =$

$$= -\sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\Lambda(t)} \lambda(t) \frac{(\Lambda(t))^k}{k!} + \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\Lambda(t)} k \frac{(\Lambda(t))^{k-1}}{k!} \lambda(t)$$

$$= -\sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^k}{k!} \lambda(t) + \sum_{j=n-1}^{+\infty} e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^j}{j!} \lambda(t)$$

γενίκευση της Erlang

$$= \frac{(\Lambda(t))^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \lambda(t) \cdot e^{-\Lambda(t)} \qquad t \geq 0$$

(iii) $0 \leq x \leq t$

$$F_{S_1 | N(t)=1}(x) = P(S_1 \leq x \mid N(t) = 1) =$$

$$P(N(x) \geq 1 \mid N(t) = 1) \overset{x \leq t}{=}$$

$$P(N(x) = 1 \mid N(t) = 1) =$$

$$\frac{P(N(x) = 1,\ N(t) = 1)}{P(N(t) = 1)} =$$

$$\frac{P(N(x) = 1,\ N(t) - N(x) = 0)}{P(N(t) = 1)}$$

$N(x) \sim \text{Poisson}(\Lambda(\cdot))$

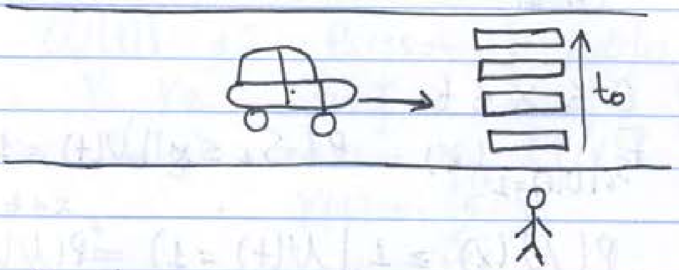
$N(t) - N(x) \sim \text{Poisson}(\Lambda(t) - \Lambda(x))$

$N(t) \sim \text{Poisson}(\Lambda(t))$

Άρα $F_{S_1 | N_1(t)=1}(x) =$

$$\frac{e^{-\Lambda(x)} \frac{(\Lambda(x))^1}{1!} \cdot e^{-(\Lambda(t) - \Lambda(x))} \cdot 1}{e^{-\Lambda(t)} \frac{(\Lambda(t))^1}{1!}} = \frac{\Lambda(x)}{\Lambda(t)}$$

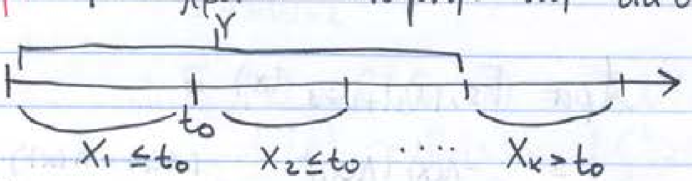
5) Άσκηση



Σε μια διάβαση τα αυτοκίνητα περνάνε σύμφωνα με διαδ. Poisson ρυθμού λ. Ένας πεζός θέλει να περάσει τη διάβαση σε χρόνο t_0. Ο πεζός θα αρχίσει τη διάσχιση του δρόμου όταν το επόμενο αυτοκίνητο θα περάσει σε χρόνο $> t_0$

→ Μέσος χρόνος αναμονής στη διάβαση;

Λύση: Y = χρόνος αναμονής στη διάβαση



1ος τρόπος: $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$ όπου

όχι ανεξ. των X_i → N = # αυτοκινήτων μέχρι την έναρξη της διάσχισης

$= \sup\{ n : X_1, X_2, \ldots, X_n \leq t_0 \}$

$$E[Y] \overset{\text{Θ.Ο.Μ.Τ}}{=\!=} \sum_{n=0}^{+\infty} P(N=n)\, E\left[\sum^{N} X_i \,\middle|\, N=n\right]$$

$$\bullet\ P(N=n) = P(X_1 \le t_0, X_2 \le t_0, \dots, X_n \le t_0, X_{n+1} > t_0)$$
$$= (1-e^{-\lambda t_0})^n \cdot e^{-\lambda t_0}$$

γεωμετρική ?

δεν μπορώ να διώξω τώρα τη δέσμευση

$$\bullet\ E\Big[\sum_{i=1}^{N} X_i \,\Big|\, N=n\Big] = E\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i \,\Big|\, N=n\Big] =$$
$$E\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i \,\Big|\, X_1 \le t_0, \dots, X_n \le t_0, X_{n+1} > t_0\Big] =$$
$$\sum_{i=1}^{n} E[X_i \mid X_1 \le t_0, \dots, X_n \le t_0, X_{n+1} > t_0] \overset{X_1,\dots,X_{n+1}\ \text{ανεξ.}}{=\!=}$$
$$\sum_{i=1}^{n} E[X_i \mid X_i \le t_0] \overset{X_1,\dots,X_n}{\underset{\text{ισόνομες}}{=\!=}} n\, E[X_1 \mid X_1 \le t_0] =$$
$$n \cdot \frac{E[X_1 \cdot 1_{\{X_1 \le t_0\}}]}{P[X_1 \le t_0]}$$

$$\bullet\ E[X_1 \cdot 1_{\{X_1 \le t_0\}}] = \int_0^{+\infty} x\, 1_{\{x \le t_0\}} \lambda e^{-\lambda x}\, dx =$$
$$\int_0^{t_0} \lambda x e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda} P(\text{Erlang}(2,\lambda) \le t_0)$$

$$\text{Άρα}\quad E\Big[\sum_{i=1}^{N} X_i \,\Big|\, N=n\Big] = \frac{n \cdot \left(\frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}\right)}{1-e^{\lambda t_0}} =$$
$$= \frac{n}{\lambda}\left[1 - \frac{\lambda t_0 e^{-\lambda t_0}}{1-e^{-\lambda t_0}}\right] = \frac{n}{\lambda} - \frac{n t_0 e^{-\lambda t_0}}{1-e^{-\lambda t_0}}$$

$$\text{Άρα}\ E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1-e^{-\lambda t_0})^n \cdot e^{-\lambda t_0} \left[\frac{n}{\lambda} - \frac{n t_0 e^{-\lambda t_0}}{1-e^{-\lambda t_0}}\right] =$$
$$= \frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda t_0} - \lambda t_0 e^{-\lambda t_0}) \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \underbrace{(1-e^{-\lambda t_0})^{n-1} e^{-\lambda t_0}}_{\text{γεωμετρική}}$$

μέση τιμή γεωμετρικής

$$= \frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda t_0}-\lambda t_0 e^{-\lambda t_0}\right)\cdot e^{\lambda t_0} =$$

$$\frac{e^{\lambda t_0}-1-\lambda t_0}{\lambda.} = \frac{e^{-\lambda t_0}-1}{\lambda} - t_0$$

2ος τρόπος: Με ανανεωτικό συλλογισμό:

$$E[Y] = \int_0^{+\infty} E[Y \mid S_1 = u]\cdot dF_X(u) \quad \text{όπου}$$

εκθετική

$S_1 = X_1$ = χρονος διελευσης 1ου αυτοκινητου

$$\cdot E[Y \mid S_1 = u] = \begin{cases} 0 & , u > t_0 \\ u + E[Y] & , u \le t_0 \end{cases}$$

Άρα $E[Y] = \int_0^{t_0} (u + E[Y])\,\lambda e^{-\lambda u}\, du =$

$$= \int_0^{t_0} \lambda u e^{-\lambda u}\, du + E[Y]\int_0^{t_0} \lambda e^{-\lambda u}\, du =$$

$$\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda t_0}-\lambda t_0 e^{-\lambda t_0}\right) + E[Y]\left(1-e^{-\lambda t_0}\right)$$

$$\Rightarrow E(Y)\; e^{-\lambda t_0} = \frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda t_0}-\lambda t_0 e^{-\lambda t_0}\right) \Rightarrow$$

$$E(Y) = \frac{e^{-\lambda t_0}-1}{\lambda} - t_0$$

Ανανεωτικές διαδικασίες κόστους

1) Πλαίσιο

$\{N(t)\}$ αναν. διαδ. , $X_1, X_2, \ldots$ ενδιάμεσοι χρόνοι γεγ.
$S_0 = 0, S_1, S_2, \ldots$ χρόνοι γεγ.

$\{C(t)\}$ διαδικασία κόστους συμβατή με την $\{N(t)\}$ (ή απλά ανανεωτική διαδικασία κόστους) αν
$(X_n, C_n = C(S_n) - C(S_{n-1}))$ για $n \geq 1$
είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με από κοινού κατανομή $F_{X,C}(x, y) =$
$= P(X_n \leq x, C_n \leq y)$
Η $F_{X,C}(x,y)$ λέγεται γεν. σ.κ. της αναν. διαδ. κόστους

- $X_n \to$ Χρόνος n-οστού κύκλου λειτουργίας του συστήματος
- $C_n \to$ Κόστος στη διάρκεια του n-οστού κύκλου λειτουργίας.

2) Αλματική διαδικασία κόστους

· Έστω $\{N(t)\}$ αν. διαδ. και $Y_1, Y_2, \ldots$ ακολουθία ανεξ + ισον. τμ. και $g(x, y)$ συνάρτηση. Η $\{C(t)\}$ με

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} g(X_i, Y_i)$$

λέγεται αλματική αναν. διαδ. κόστους.

Πράγματι είναι αναν. διαδ. κόστους αφού:

$$C_n = C(S_n) - C(S_{n-1}) = g(X_n, Y_n)$$

άρα $(X_n, C_n) = (X_n, g(X_n, Y_n))$ που είναι ανεξ + ισόνομα.

3) Παραδείγματα:

1) $g(x, y) = 1$ τότε $C(t) = N(t) = \#$ γεγ. στο $(0, t]$

2) $g(x, y) = y$ τότε $C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$: συνθετη ανανεωτική διαδικασία

πχ: Συνολικές απαιτήσεις σε μια ασφαλιστική εταιρία στο $(0, t]$
Y_i : Ύψος i-οστής απαίτησης
$N(t)$: # απαιτ. στο $(0, t]$

3) $g(x, y) = x$ τότε $C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i = S_{N(t)}$: χρόνος τελευταίου γεγονότος πριν τη στιγμή t.

4) $\{N(t)\}$ διαδ. επιθεωρήσεων ενός μηχανήματος

C = κόστος ανα επιθεώρηση

$K(x)$ = μέσο κόστος όταν έχει περάσει χρονος x απο την προηγούμενη επιθεώρηση

$$g(x,y) = C + K(x)$$

Άλλη μοντελοποίηση:

C = κοστος ανα επιθεώρηση

k = κοστος ανα χρονική μονάδα μεταξύ των επιθεωρήσεων

Y_i = κόστος ανταλλακτικων για μια επιθεώρηση

$$g(x,y) = C + k \cdot x + y$$

Γενικά, $C_i = g(X_i ; Y_i)$

κόστος στον i-οστό κυκλο

χρονική διάρκεια κυκλου

τυχαίοι παράγοντες.

4) Στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη

Έστω $\{N(t)\}$ ανав. διαδ. $\{C(t)\}$ ανав. διαδ. κόστους αθροιστή με την $\{N(t)\}$ με γ.σ.κ. $F_{X,C}(x,y)$ και $E[X] < +\infty$, $E[C] < +\infty$ τότε

Σ.

Α • $P\left(\lim_{t \to +\infty} \frac{C(t)}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}\right) = 1$

Θ • $\lim_{t \to +\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}$

Κ

5) Εφαρμογές με το ΣΑΘΚ.

Μοντελοποίηση + έλεγχος ορισμού

$$\text{Πρόβλημα} \longrightarrow \{\underset{\#\,\text{γεγ.}}{N(t)}\},\ \{\underset{\text{κόστος}}{C(t)}\}$$

$\Big\downarrow$ ΣΑΘΚ.

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{E[C(t)]}{t}$$: Μακροπρόθεσμο μέσο κόστος ανά χρονική μονάδα

$\Big\downarrow$ Κλασσικές μέθοδοι βελτιστοποίησης

Βελτιστοποίηση του μέσου ελέγχου παραμέτρων

6) Εφαρμογή 1

Πολιτική συντήρησης μηχανήματος

Μηχάνημα με χρόνους λειτουργίας - επισκευής (συντήρησης) (O_n, D_n) $n \geq 1$

O_n: operating, D_n: down time

ανεξ + ισόνομες $\sim F_{O,D}(x,y)$

Πολιτική συντήρησης: Συντήρηση όταν το μηχάνημα λειτουργήσει s χρονικές μονάδες (προληπτική συντήρηση) και όταν χαλάσει (συντήρηση λόγω βλάβης)

$s = ;$ ώστε ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους $\to \lim_{t\to+\infty} \frac{E[C(t)]}{t}$ να είναι ο ελάχιστος.

- Μοντελοποίηση: Γεγονός = Έναρξη λειτουργίας μηχανήματος μετά από αντίρηση.

$X_n = \min(O_n, s) + D_n$

$N(t) = \#$ γεγ. στο $(0,t]$

$C(t)$ = κόστος αντιρήσεων στο $(0,t]$

C_p = κόστος προληπτικής αντίρ. ($p \to$ preventive)

C_f = κόστος αναγκαστικής αντίρ. ($f \to$ failure)

Τότε $\underbrace{C(t)}_{\text{Αλματική αναν. δια δ. κόστους}} = \sum_{i=1}^{N(t)} \Big[C_p \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{\{O_i > s\}}}_{\text{προληπτικά}} + C_f \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{\{O_i \le s\}}}_{\text{χάλασε}} \Big]$

$C_n = C_p \cdot \mathbb{1}_{\{O_n > s\}} + C_f \cdot \mathbb{1}_{\{O_n \le s\}}$

$(X_n, C_n) = (\min(O_n, s) + D_n,\ C_p \mathbb{1}_{\{O_n > s\}} + C_f \cdot \mathbb{1}_{\{O_n \le s\}})$
$= g(O_n, D_n)$ ανεξ + ισόνομες για $n \ge 1$.

- ΣΑΘΚ: $\lim_{t\to+\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C_n]}{E[X_n]}$

$E[X_n] = E[\min(O_n, s) + D_n] =$

$$E[\min(O_n, s)] + E[D_n] =$$

$$\int_0^{+\infty} P(\min(O_n,s) > t)\, dt + \int_0^{+\infty} (1 - F_D(t))\, dt =$$

$$\int_0^{s} P(O_n > t)\, dt + \int_0^{+\infty} (1 - F_D(t))\, dt =$$

$$\int_0^{s} (1 - F_O(t))\, dt + \int_0^{+\infty} (1 - F_D(t))\, dt$$

$$E[C_n] = c_p \cdot P(O_n > s) + c_f \cdot P(O_n \leq s) =$$
$$c_p\,(1 - F_O(s)) + c_f \cdot F_O(s)$$

Άρα $$C(s) = \frac{c_p(1 - F_O(s)) + c_f\, F_O(s)}{\int_0^{s}(1-F_O(t))\,dt + \int_0^{+\infty}(1 - F_D(t))\,dt}$$

- Βελτιστοποίηση: $C(s) = \dfrac{\text{αριθμ.}}{\text{παρονομαστής}}$ ← ↑ αν $c_f \geq c_p$, ↓ αν $c_f \leq c_p$ (αριθμ.); ← ↑ ως προς s (παρονομαστής)

Αν $c_f \leq c_p$ τότε $C(s) \downarrow$ και $s^* = +\infty$
(το αφήνω να χαλάσει)

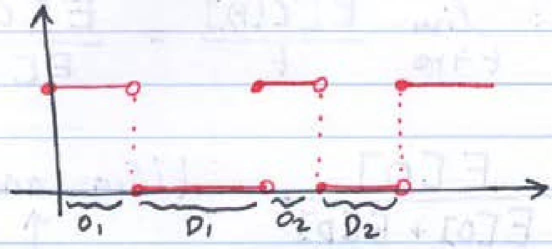
Αν $c_p \leq c_f$ (πιο ρεαλιστικό) $C(s)$ όχι αναγκαστικά μονότονη

$$C'(s) = 0 \Rightarrow (c_f - c_p)\, f_O(s) \left(\int_0^{s} (1 - F_O(t))\,dt + \int_0^{+\infty} (1 - F_D(t))\,dt \right)$$
$$- \left(c_p - (c_f - c_p)F_O(s)\right)(1 - F_O(s)) = 0 \Rightarrow$$

...

7) Εφαρμογή 2

Η εναλλασσόμενη ανανεωτική διαδικασία



Μηχανή εναλλασσόμενη σε περιόδους λειτουργίας και αργίας (O_n, D_n) $n \geq 1$ ανεξ+ ισόνομα

$$I(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν λειτουργεί} \\ 0, & \text{αν δεν λειτουργεί} \end{cases}$$

Έχουμε δει ότι $\lim\limits_{t \to +\infty} P(I(t)=1) = \dfrac{E[O]}{E[O]+E[D]}$

(Αν. σύλλογ, Ανανεωτ. εξίσωση (λύση), ΒΑΘ)

- Μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό χρόνου λειτουργίας του συστήματος:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{E\left[\int_0^t I(u)\,du\right]}{t} = ;$$

Μοντελοποίηση: Γεγονός = Έναρξη χρ. λειτ. μηχανήματος

$$X_n = O_n + D_n$$

$C(t) = \int_0^t I(u)\,du$ = χρόνος λειτουργίας στο $(0,t]$

$$C_n = C(S_n) - C(S_{n-1}) = O_n$$

$(X_n, C_n) = (O_n + D_n, O_n)$ ανεξ+ισον. για $n \geq 1$

διοτι (O_n, D_n) ανεξ+ισον.

ΣΑΘΚ: $\lim_{t \to +\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C_n]}{E[X_n]} =$

$$\frac{E[O]}{E[O] + E[D]}$$ (ιδια απάντηση)

Διαφορετικά ερωτήματα με διαφορετικές μεθόδους επίλυσης αλλα ιδια απάντηση