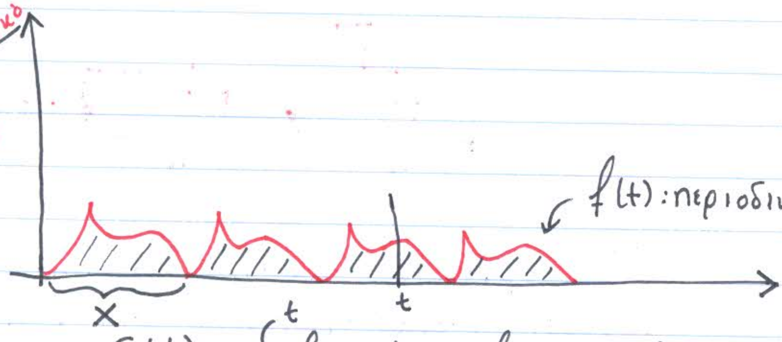
Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα με κόστη Εφαρμογές

1) ΣΑΘΚ: $\{N(t)\}$ ανάν. διαδ., $X_1, X_2, \dots$ ενδ. χρόνοι $S_1, S_2, \dots$ χρόνοι γεγ. και $\{C(t)\}$ συμβατή ανάν. διαδ. κόστους δλδ $(X_n, C_n = C(S_n) - C(S_{n-1}))$ ανεξ + ισόνομες $n \geq 1$ $\sim F_{X,C}(x,y)$ τότε:

Μακροπρόθεσμος ρυθμός κόστους: $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{C(t)}{t} = \dfrac{E[C]}{E[X]}$ με πιθ 1

Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους: $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{E[C(t)]}{t} = \dfrac{E[C]}{E[X]}$

ντετερμινιστικό ανάλογο



$$C(t) = \int_0^t f(u)\,du, \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{C(t)}{t} = \frac{c}{t}$$

όπου $c = C(x) = \int_0^x f(u)\,du$.

$$\frac{C(t)}{t} = \frac{\sum_{n=1}^{[\frac{t}{x}]} \int_{(n-1)x}^{nx} f(u)\,du + \int_{[\frac{t}{x}]\cdot x}^{t} f(u)\,du}{\frac{t}{x}\cdot x}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{C(t)}{t} = \frac{[\frac{t}{x}]\cdot c + \int_{[\frac{t}{x}] x}^{t} f(u)\,du}{\frac{t}{x}\cdot x} = \frac{c}{x}$$

2) Εφαρμογή: $\{A(t)\}$ Poisson διαδ. ρυθμού λ αφίξης προϊόντων σε μια αποθήκη. Η αποθήκη εκκαθαρίζεται κάθε x χρονικές μονάδες (ακαριαία).

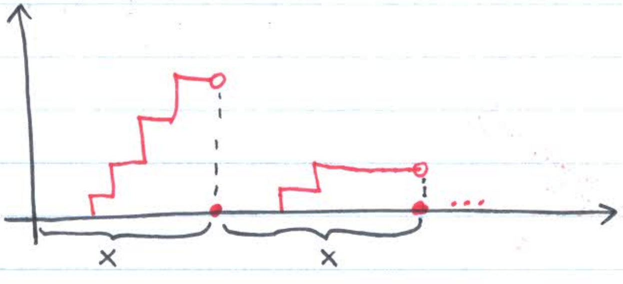
K: πάγιο κόστος ανα εκκαθάριση

κ: κόστος εκκαθ. ανα προϊον

h: κόστος αποθ. ανα προϊον και χρονική μονάδα

Να βρεθεί η συνάρτηση $C(x)$ του μακροπροθέσμου μέσου ρυθμού κόστους αποθήκης.

Απάντηση:

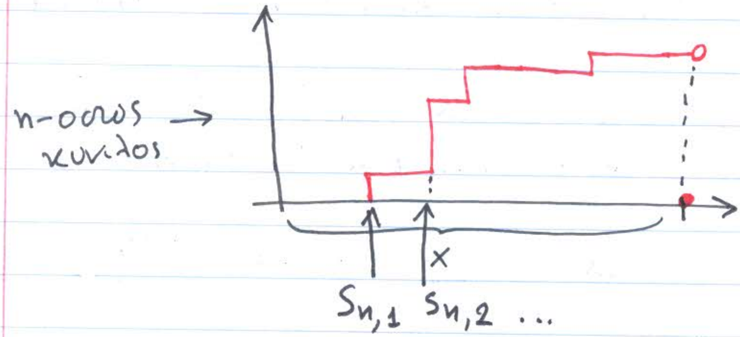


Εδώ ορίζουμε $X_n = x$ και $S_n = \sum^{n} X_i = nx$ (χρονος n-οστού γεγονότος) και $N(t) = \left[\frac{t}{x}\right] =$ # εκκαθ. στο $(0,t]$ (ανάν. διαδ. με σταθερούς ενδ. χρονους)

$$C_n = K + \kappa \cdot A_n + h \cdot \sum_{i=1}^{A_n} (x - S_{n,i})$$

οπου $A_n = (A(nx) - A((n-1)x)) =$ # προϊοντων (αφίξεων) στον n-οστο κυκλο $((n-1)x, nx)$

$S_{n,i}$ = ο χρονος άφιξης του i-οστου προϊόντος στον n-οστο κυκλο απο την έναρξη του κύκλου



- $(X_n, C_n) = (x, f(A_n))$: ανεξ + ισόνομες

εξαρτάται μονο απο την $\{A(t) : n-1 \leq t \leq nx\}$.

Άρα το ΣΑΘΚ είναι εφαρμόσιμο.

Άρα $c(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]}$

$E[X] = x.$

$E[C] = E[K + k A_n + h \sum_{i=1}^{A_n} (x - S_{n,i})] =$

$K + k E[A_n] + h \cdot E[\sum_{i=1}^{A_n} (x - S_{n,i})] =$

$K + k \cdot \lambda x + h \, E[\sum_{i=1}^{A_n} (x - S_{n,i})]$

- $E[\sum_{i=1}^{A_n} (x - S_{n,i})] = \sum_{j=0}^{+\infty} P(A_n = j) E[\sum_{i=1}^{A_n} (x - S_{n,i}) | A_n = j]$
- $E[\sum_{i=1}^{A_n} (x - S_{n,i}) | A_n = j] = E[\sum_{i=1}^{j} (x - S_{n,i}) | A_n = j] =$

$= \sum_{i=1}^{j} (x - E(S_{n,i} | A_n = j)) \overset{\text{Θ. Campbell}}{=\!=}$

$$\sum_{i=1}^{j}\left(x-\frac{i\cdot x}{j+1}\right) = x\cdot j - \frac{j(j+1)}{2}\frac{x}{j+1} = \frac{jx}{2}$$

Άρα $E[C] = K + \kappa\lambda x + h\sum_{j=0}^{+\infty} P(A_n=j)\,(jx/2) =$

$K + \kappa\lambda x + h\, x/2\; E[A_n] =$

$K + \kappa\lambda x + h\, x/2 \cdot \lambda x$

Άρα $c(x) = \dfrac{K + \kappa\lambda x + \frac{h x^2 \lambda}{2}}{x} = \dfrac{K}{x} + \kappa\lambda + \dfrac{\lambda h x}{2}$

Εναλλακτικά,

$$C_n = K + \kappa A_n + h\int_0^x A(u+(n-1)x) - A((n-1)x)\,du$$

$$E[C_n] = K + \kappa\lambda x + h\int_0^x \underbrace{E[A(u+(n-1)x) - A((n-1)x)]}_{\lambda u}\,du$$

$$= K + \kappa\lambda x + h\int_0^x \lambda u\, du =$$

$$K + \kappa\lambda x + \frac{h\lambda x^2}{2}$$

Βέλτιστο x : $c'(x) = -K/x^2 + \dfrac{\lambda h}{2}$

$c''(x) = \dfrac{2K}{x^3} > 0 \quad x > 0$

άρα $c(x)$ κυρτή στο $(0, +\infty)$

άρα έχει ολικό ελάχιστο στο

x^* με $c'(x^*) = 0 \Rightarrow$

$x^* = \sqrt{2K/\lambda h}$

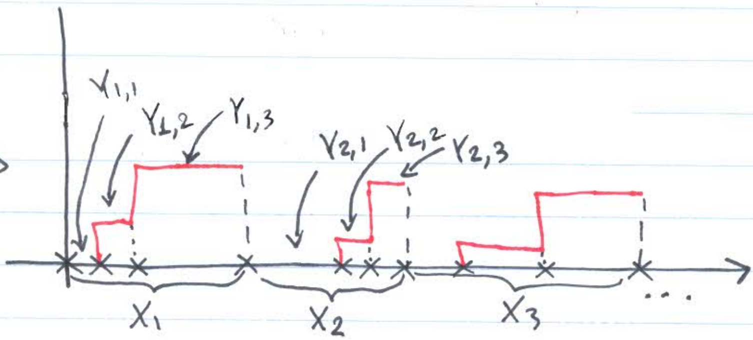
3) Εφαρμογή 2: Εκκαθάριση αποθήκης όταν συγκεντρωθούν m- προϊόντα

$\{A(t)\}$ αν. διαδ. άφιξης προϊόντων με μέσο ενδ. χρονο $\mu = 1/\lambda$.
(λ : ρυθμός άφιξης προϊόντων).
Η αποθήκη εκκαθαρίζεται όταν συγκεντρωθούν m- προϊόντα.

$C(m)$ = Μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους
m^* : βέλτιστο m.

Απάντηση:

πχ για $m = 3$ →



$N(t)$ = # εκκαθαρίσεων στο $(0, t]$.

X_n = ενδιαμ. χρονος μεταξύ $(n-1)$-οστής και n-οστής εκκαθ. $= \sum_{i=1}^{m} Y_{n,i}$ όπου

$Y_{n,i}$ είναι ο ενδιάμεσος χρόνος μεταξύ $(i-1)$-οστού και i-οστού προϊόντος στον n-οστό κύκλο.

$$C_n = K + \kappa \cdot m + h\,(\overbrace{Y_{n,2} + \dots + Y_{n,m}}^{\text{χρον. αποθ. } 1^{ου} \text{ γεγ.}} + Y_{n,3} + \dots + Y_{n,m} + \dots + Y_{n,m})$$

$$\Rightarrow C_n = K + \kappa m + h \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} Y_{n,j}$$

(X_n, C_n) ανεξ, ισον $n \geq 1$. ΣΑΘΚ ✓

$$E[X] = E[X_n] = m \cdot \mu$$

$$E[C] = K + \kappa m + h \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^{m} E[Y_{n,j}] =$$

$$= K + \kappa m + h \sum_{i=1}^{m-1} (m-i)\mu =$$

$$K + \kappa m + h \frac{(m-1)m}{2} \mu.$$

Άρα $$C(m) = \lim_{t \to +\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C]}{E[X]} =$$

$$\frac{K}{m\mu} + \frac{\kappa}{\mu} + \frac{h(m-1)}{2}$$

Έστω $C(x)$ η επέκταση της $C(m)$ στους πραγματικούς.

$$C(x) = \frac{K}{x\mu} + \kappa/\mu + \frac{h(x-1)}{2}$$

$$C'(x) = -K/x^2\mu + h/2$$

$$C''(x) = 2K/x^3\mu > 0 \quad x > 0$$

$C(x) \longrightarrow$ κυρτή στο $(0, +\infty)$

Άρα $C'(x^*) = 0 \Rightarrow x^* = \sqrt{\frac{2K}{\mu h}}$ και

το βέλτιστο m είναι $m^* = [x^*]$ ή
$m^* = [x^*] + 1$.