Ανανεωτικές Διαδικασίες με κόστη
Αναγεννητικές Διαδικασίες

1) Αναγεννητικές Διαδικασίες

Ορισμός: $\{X(t)\}$ λέγεται αναγεννητική διαδικασία αν $\exists\ S_1$: $P(S_1 = 0) < 1$ και $P(S_1 < +\infty) = 1$ ώστε:

i) $\{X(t) : 0 \le t < S_1\}$, $\{X(t) : t \ge S_1\}$ ανεξ.

ii) $\{X(t) : t \ge 0\}$, $\{X(t) : t \ge S_1\}$ ισονομες

Παρατήρηση: Υπάρχουν $S_1, S_2, \dots$ με τις ιδιότητες με την S_1 ώστε:

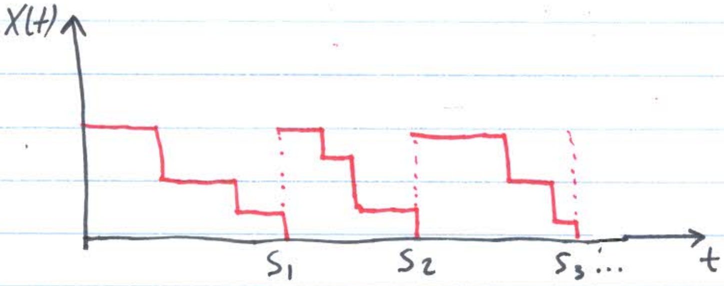
i) $\{X(t) : 0 \le t < S_1\}$

$\{X(t) : 0 \le t < S_2\}$

$\vdots$

ανεξάρτητες

ii) $\{X(t) : t \ge 0\}$, $\{X(t) : t \ge S_n\}$ ισονομες $\forall n \ge 1$



Οι χρονοι $X_1 = S_1$, $X_2 = S_2 - S_1$, $X_3 = S_3 - S_2, \dots$ ειναι ανεξ + ισον. οπότε $S_1, S_2, \dots$ ειναι χρονοι γεγ. ανανεωτικής διαδ.

- Καθε αναγεννητική διαδικασια συνδεεται με αυτον τον τροπο με μια ανανεωτική διαδ.

2) Οριακές κατανομές αναγεννητικής διαδικασίας

Έστω $\{X(t)\}$ αναγ. διαδ.

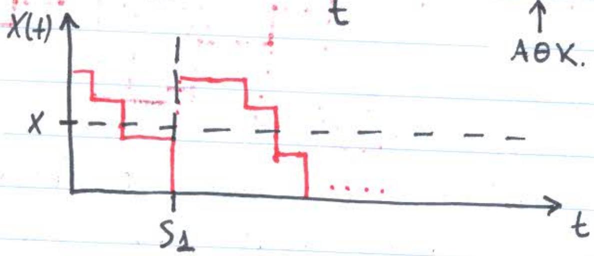
▶ Οριακή κατανομή της $\{X(t)\}$: $\lim\limits_{t \to +\infty} P(X(t) \le x) = F_{X(+\infty)}(x)$

▶ Οριακή αναμενόμενη δειγματική συνάρτηση κατανομής της $\{X(t)\}$ (μέσο ποσοστό του χρόνου που $X(t) \le x$ $(t \to +\infty)$) : $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{E\left[\int_0^t \underbrace{1_{\{X(u) \le x\}}\, du}_{\text{ο χρόνος στο } (0,t] \text{ που } \{X(u) \le x\}}\right]}{t} = F_X(x)$

Θεώρημα: Αν $\{X(t)\}$ αναγ. διαδ. με $E[S_1] < +\infty$ τότε:

i) $F_X(x) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{E\left[\int_0^t 1_{\{X(u) \le x\}}\, du\right]}{t} \underset{\text{ΑΘΚ.}}{=} \dfrac{E\left[\int_0^{S_1} 1_{\{X(u) \le x\}}\, du\right]}{E[S_1]}$

ο μέσος χρόνος που η $X(t) \le x$ στο S_1 (σε έναν κύκλο)



ii) Αν υπάρχει η $F_{X(+\infty)}(x)$ (ικανή συνθήκη είναι η κατανομή του S_1 να είναι απεριοδική) τότε:

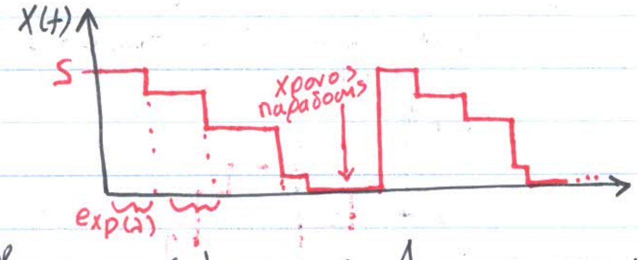
$$F_{X(+\infty)}(x) = F_X(x)$$

3) Ασκηση: Πελατες φτάνουν και ζητουν προϊον σύμφωνα με διαδ. Poisson με ρυθμο λ.

- S: αρχικό αποθεμα προϊόντος
- Αμεση ικανοποίηση ζήτησης
- Απωλεια πελατων αν δεν υπαρχει αποθεμα
- Εξάντληση αποθέματος → Παραγγελία S με μέσο χρονο παράδοσης L.
- h: κοστος αποθήκευσης ανα χρονική μονάδα και μονάδα προϊόντος
- c: κοστος αγοράς προϊόντος απο αποθηκη
- p: τιμή πώλησης
- d: παγιο κοστος παραγγελίας

Μακροπροθεσμος μέσος ρυθμος κέρδους.

Απαντηση:



X(t): Υψος αποθεματος: Αναγεννητική με σημεία αναγ. τις στιγμές παράδοσης παραγγελιων

Αρα η C(t): διαδ. κοστους που συσσωρ. ως την στιγμή t είναι αναν. διαδ. κοστους.

Αρα το ΣΛΘΚ είναι εφαρμόσιμο

Αρα $\lim_{t\to+\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C_1]}{E[S_1]}$ ← κέρδος στον 1ο κυκλο, ← διαρκεια 1ου κυκλου.

$$E[S_1] = \overset{\substack{S \text{ πελατες} \\ exp(\lambda)}}{\overbrace{S}} \cdot 1/\lambda + \overset{\text{χρονος παραδοσης}}{L}$$

$$E[C_1] = -[\underbrace{h \cdot S \cdot 1/\lambda}_{\substack{\text{μεσο κοστος} \\ \text{αποθ. μεχρι} \\ \text{τον 1ο πελατη}}} + \underbrace{h(S-1) \cdot 1/\lambda}_{\substack{\text{μεσο κοστος αποθ.} \\ \text{μεταξυ 1ου και} \\ \text{2ου πελατη}}} + \ldots + h \cdot 1/\lambda + d + cS]$$

$$+ p \cdot S$$

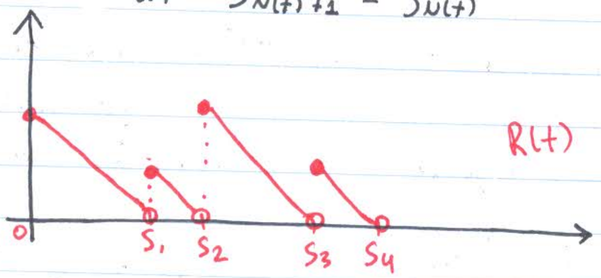
Αρα ο μακροπροθεσμος μεσος ρυθμος κερδους ειναι:

$$\frac{E[C_1]}{E[S_1]} = \frac{(p-c)S - d - h \cdot \frac{S(S+1)}{\lambda 2}}{S \cdot 1/\lambda + L}$$

4) Εφαρμογή

$\{N(t)\}$ αναν. διαδ. με ενδ. χρ. $X_1, X_2, \ldots$, $E(X_i) < +\infty$
$Var(X_i) = \sigma^2 < +\infty$

ηλικια $A(t) = t - S_{N(t)}$
υπολειπομενος χρονος αναν. $R(t) = S_{N(t)+1} - t$
$(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$



Η $R(t)$ ειναι αναγεννητική με χρονους αναγ. $S_1, S_2, \ldots$ (χρονοι γεγ. της αναν. διαδ. $\{N(t)\}$)

i) Μακροπρόθεσμο μέσο υπολειπ. χρόνο ανανέωσης : $\lim_{t\to+\infty} \frac{E[\int_0^t R(u)du]}{t}$

ii) Οριακή αναμενομ. δειγμ. αναρτ. καταν. της $R(t)$: $F_R(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{E[\int_0^t 1_{\{X(u)\le x\}} du]}{t}$

(μακροπροθ. ποσοστό χρόνου που ο υπολ. χρ. αναν. είναι $< x$)

Έχουμε δει ότι: $\lim_{t\to+\infty} E[R(t)] = \frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}$

$$\lim_{t\to+\infty} P[R(t)\le x] = F_{R(+\infty)}(x) = \frac{\int_0^x (1-F_X(u))du}{\mu}$$

i) Θέτω $C(t) = \int_0^t R(u)du$ τότε

$$C_n = \int_0^{X_n} (X_n - u)\,du = \left[X_n\cdot u - \frac{u^2}{2}\right]_0^{X_n} =$$

κόστος n-οστού κύκλου

$$= X_n^2 - X_n^2/2 = X_n^2/2$$

$(X_n, C_n) = (X_n, X_n^2/2)$ ανεξ +ισον $\forall n\ge 1$

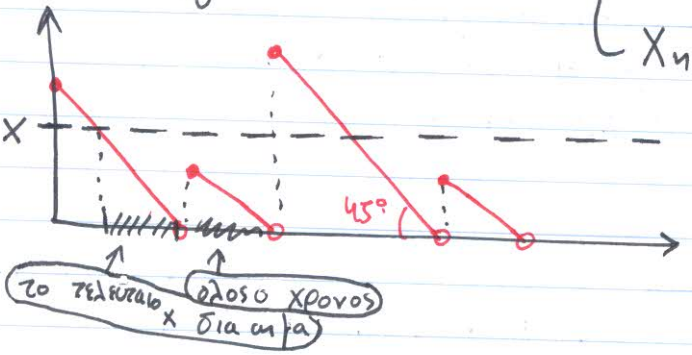
αφού X_n: ανεξ $n\ge 1$.

Άρα ισχύει το ΣΑΘΚ. Άρα:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{E[\int_0^t R(u)\,du]}{t} = \frac{E[C_1]}{E[X_1]} = \frac{E[X_1^2]}{2E[X_1]} = \frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu}.$$

ii) Θετω $C(t) = \int_0^t 1_{\{R(u) \leq x\}}\, du$.

$$C_n = \int_0^{X_n} 1_{\{R(u) \leq x\}}\, du = \begin{cases} x, & X_n > x \\ X_n, & X_n \leq x \end{cases}$$



Αρα $C_n = \min(X_n, x)$ άρα
(X_n, C_n) : ανεξ + ισον $\forall n \geq 1$.
Αρα εφαρμοζω ΣΑΘΚ. Αρα

$$F_R(x) = \frac{E[C_1]}{E[X_1]} \qquad \left[\underset{\text{για } X \text{ μη αρνητική}}{E[X] = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(t))\, dt} \right]$$

$$\cdot E[C_1] = E[\min(X_1, x)] = \int_0^{+\infty} P(\min(X_1, x) > t)\, dt =$$

$$\int_0^x P(\min(X_1, x) > t)\, dt + \cancel{\int_x^{+\infty} P(\underbrace{\min(X_1, x) > t}_{(X_1 > t,\ x > t)})\, dt}^{\,0} =$$

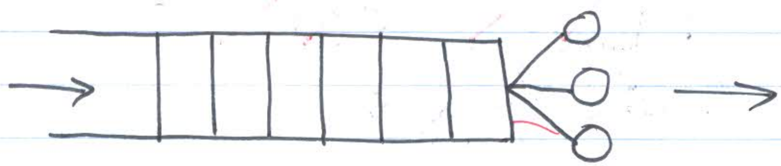
$$\int_0^x P(X_1 > t, x > t)\, dt \overset{x > t}{=} \int_0^x P(X_1 > t)\, dt = \int_0^x (1 - F(t))\, dt$$

Αρα $$f_R(x) = \frac{\int_0^x (1 - F(t))\, dt}{\mu}.$$

Ουρές Αναμονής

1) Πλαίσιο

Συστημα εισόδου - εξόδου
- Διακριτές μονάδες
- Τυχαιοτητα



Ερωτήματα:

1) Ποσο περιμένει ένας πελάτης; → Πελάτης
2) Ποσοι πελάτες περιμένουν; → Διαχειριστης
3) Ποσοι υπηρέτες είναι απασχολημένοι; → Υπηρέτες

2) Περιγραφή Συστήματος - Ονοματολογία

Erlang (1909) → 1η εργασία
Kendall → Ονοματολογία

A | B | C | K ← ( ) ↙ πειθαρχία ουράς.

Διαδικασία αφίξεων, Χρόνοι εξυπ., # υπηρετών, Χωρητικότητα

- Διαδικασία Αφίξεων (A)

M : Poisson διαδ. Αφίξεων
↑ (δλδ Exp ενδιαμ. χρονοι)
Memoryless / Markovian

D : Ντετερμινιστική διαδ. αφίξεων
↑ (δλδ σταθ. χρονοι)
Deterministic

GI / G : Ανανεωτική διαδ. αφίξεων
↑ (δλδ ανεξ. ισον. ενδιαμ. χρονοι)
General independent

E_k (Erlang) , H_k (Hyperexponential)

- Χρονοι Εξυπηρέτησης (B)
Ιδια με τους ενδ. χρον. αφιξ. M, D, GI

- Πλήθος παράλληλων υπηρετών (C)
- Χωρητικότητα (k) : $K = \underbrace{C}_{\text{θέσεις υπηρετων}} + \underbrace{(k - c)}_{\text{θέσεις αναμονής}}$

Πειθαρχία Ουράς → Τρόπος επιλογής πελάτη προς εξυπηρέτηση

FIFO: First in first out
FCFS: First Come first served.

LIFO: Last in first out
LCFS: Last come first served

- Πειθαρχίες με προτεραιότητες

SSTF: Shortest Service Time First

Άλλα χαρακτηριστικά

- Αποθαρρυνόμενοι πελάτες (balking)
(Εγκαταλείψεις κατά την είσοδο)

- Ανυπόμονοι πελάτες (reneging)
(Εγκαταλείψεις κατά την αναμονή)

- Επαναπροσπάθειες (retrivals)

3) Προβλήματα Ουρών Αναμονής

1) Αποτίμηση απόδοσης

2) Βέλτιστος σχεδιασμός

3) Δυναμικός Έλεγχος

4) Παιγνιοθεωρητική Ανάλυση

4) Παράμετροι εισόδου

- a: μέσος ενδιάμεσος χρονος αφίξεων

ή $\lambda = 1/a$: Ρυθμος αφίξεων

- b = μέσος χρονος εξυπηρέτησης

ή $\mu = 1/b$: Ρυθμος εξυπηρέτησης

- c = # υπηρετων

- k = χωρητικότητα

5) Μέτρα απόδοσης - Στοχαστικές Διαδικασίες.

Διαχείρισης

$Q(t)$ = # πελατών την στιγμή t

$Q_s(t)$ = # πελατών σε εξυπηρέτηση την στιγ. t

$Q_q(t)$ = # πελατών σε αναμονή την στιγμή t

$$Q(t) = Q_s(t) + Q_q(t)$$

πελάτης

S_n = Χρόνος παραμονής του n-οστού πελάτη (sojourn)

X_n = Χρόνος εξυπηρέτησης του n-οστού πελάτη

W_n = Χρόνος αναμονής του n-οστού πελάτη (waiting)

$$S_n = X_n + W_n$$

A_n = Χρόνος άφιξης n-οστού πελάτη

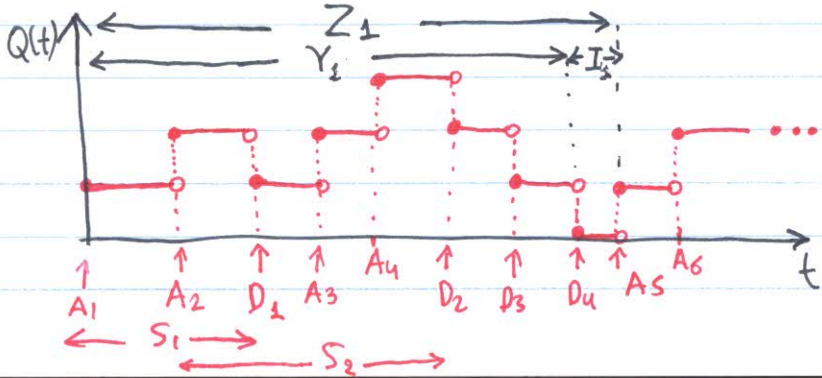
D_n = Χρόνος αναχώρησης n-οστού πελάτη

Διαχειριστές Υπηρεσίας.

Z_n : n-οστός κύκλος λειτουργίας

I_n : n-οστή περίοδος αργίας

Y_n : n-οστή περίοδος συνεχής λειτουργίας



Z_n : Ο χρονος απο πελάτη που βρίσκει κενο σναμμα μέχρι τον επόμενο που θα βρει κενο σναμμα.

$$\left(\begin{array}{l} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ποσο θα περιμένει ο } n+1 \text{ - πελάτης}}}{W_{n+1}} = D_{n+1} - A_{n+1} - X_{n+1} \\ \\ W_{n+1} = \max\left(0, W_n + X_n - (A_{n+1} - A_n)\right) \end{array} \right)$$

6) Αναγεννητικότητα

Οι στοχ. διαδ. $\{Q(t)\}$ κλπ είναι ανήθως αναγεννητικές

πχ: η $\{Q(t)\}$ στην GI/GI/c ουρά είναι αναγεννητική διαδ. με σημεία αναγέννησης τις στιγμές αφίξεων πελατών που βρίσκουν το σναμμα κενό.

Οταν λοιπον, η $\{Q(t)\}$ είναι αναγενν. τοτε έχουμε τα αποτελέσματα της αναγεννητικής Θεωρίας, Ειδικοτερα αν οι χρονοι μεταξυ των αναγεννήσεων είναι απεριοδικοι τοτε

$$P_j = \underbrace{\lim_{t \to +\infty} P(Q(t) = j)}_{\text{οριακή πιθ. } j \text{ πελ.}} = \underbrace{\lim_{t \to +\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{Q(u)=j\}} du\right]}{t}}_{\substack{\text{Μακροπροθ. μέσο} \\ \text{ποσοστο χρονου} \\ j\text{-πελατων}}}$$

(P_j): Κατανομή (οριακή, στάσιμη, ισορροπίας) των # πελατών σε συνεχή χρόνο

$$F_S(x) = \lim_{n\to+\infty} P(S_n \le x) = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{E\left[\sum_{i=1}^{n} 1_{\{S_i \le x\}}\right]}{n}}_{\text{Μακρ. μέσ. ποσ. πελατών με παραμονή} \le x}$$

$$\underbrace{E[Q]}_{\text{μέσο πλήθος πελατών}} = \lim_{t\to+\infty} E[Q(t)] = \lim_{t\to+\infty} \frac{E\left[\int_0^t Q(u)\,du\right]}{t}$$

$$\underbrace{E[S]}_{\text{μέσος χρόνος παραμονής}} = \lim_{n\to+\infty} E[S_n] = \lim_{n\to+\infty} \frac{E\left[\sum_{i=1}^{n} S_i\right]}{n}$$

7) Εμφυτευμένες διαδικασίες σε στιγμές αφίξεων/αναχωρήσεων

$Q(t)$ = # πελ. την στιγμή t.

Αν $A_1 < A_2 < \dots$: στιγμές αφίξεων πελατών τότε ορίζω

$Q_n^- = Q(A_n^-)$ = # πελατών πριν την n-οστή άφιξη

↑ Εμφυτευμένη διαδ. # πελατών σε στιγμές αφίξεων (Πόσους πελάτες θα δει ο n όταν μπει στο σύστημα)

$Q_n^+ = Q(D_n^+) = \#$ πελ. μετά την αναχώρηση του n-οστού πελάτη

↑

εμφυτευμένη διαδικασία πλήθους πελατών σε στιγμές αναχώρησης
(Πόσους θα δει πίσω του όταν φύγει)

$$P_j = \lim_{t \to +\infty} \frac{E\left[\int_0^t 1_{\{Q(u)=j\}} du\right]}{t}$$

$$a_j = \lim_{n \to +\infty} \frac{E\left[\sum_{i=1}^{n} 1_{\{Q_i^- = j\}}\right]}{n}$$

↑

Ποσοστό n-πρώτων πελατών που είδαν j-πελάτες την στιγμή άφιξης

$$d_j = \lim_{n \to +\infty} E\left[\sum_{i=1}^{n} 1_{\{Q_i^+ = j\}}\right]$$

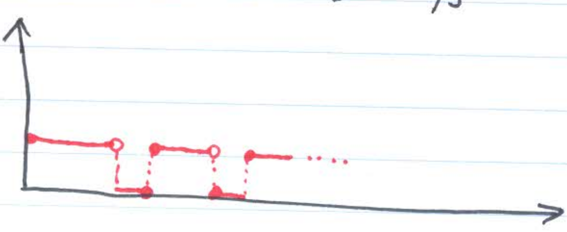
↑

Ποσοστό n-πρώτων πελατών να είδαν j-πελάτες την στιγμή της αναχώρησης.

Γενικά $(P_j) \neq (a_j) \neq (d_j) \neq (P_j)$

8) Παράδειγμα $P_j \neq a_j$

1) D/D/1 $a=1$ $b=0,9$



Εδώ $P_j = \begin{cases} 0,1 & , j=0 \\ 0,9 & , j=1 \\ 0 & , j\geq 2 \end{cases}$

$a_j = \begin{cases} 1 & , j=0 \\ 0 & , j\geq 1 \end{cases}$ → όλοι το βλέπουν κενό $a_j = d_j$

2) D/D/1 $\quad a=1 \quad b=0,1$

$P_j = \begin{cases} 0,9 & , j=0 \\ 0,1 & , j=1 \\ 0 & , j\geq 2 \end{cases} \qquad a_j = \begin{cases} 1 & , j=0 \\ 0 & , j\geq 1 \end{cases}$

$a_j = d_j$

9) Παράδειγμα $(a_j) \neq (d_j)$

Πελάτες έρχονται με Poisson(λ).
Μόλις μαζευτούν κ ένα βαν τους απομακρύνει

$d_j = \begin{cases} 1 & , j=0 \\ 0 & , j\geq 1 \end{cases}$

$a_j = P_j = \begin{cases} 1/\kappa & j=0,\dots,\kappa-1 \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$

Βασικά Αποτελέσματα στη Θεωρία Ουρών

1) Πλαίσιο

Συστήματα εξυπηρέτησης

λ : ρυθμός αφίξεων ή $a = 1/\lambda$ μέσος ενδ. χρ. αφιξ.

μ : " εξυπηρέτησης ή $b = 1/\mu$ μέσος χρον. εξυπ.

Q = # πελ. στο συστ. σε ισορροπία

S = Χρονος παραμ. πελ. στο συστ. σε ισορροπία

p_j = πιθ. j ατόμων σε συνεχή χρονο

a_j = " " πριν απο άφιξη

d_j = " " μετά απο αναχώρηση

2) Ρυθμος ανταγωνισμού

$\rho = \lambda \cdot b$ = Ρυθμος αφιξης × Μεσος χρ. εξυπ.

↑ Ρυθμος / ένταση ανταγωνισμού

(Μέση ποσοτητα εργασίας που εισερχ. στο σύστημα ανα χρον. μονάδα)

3) Βασικό Αποτελ. 1: Χαρακτηρισμός Ευστάθειας

Θεώρημα: Έστω GI/GI/c σύστημα με ενδιάμ. χρ. αφιξ. ή χρ εξυπηρ. απεριοδ. Τότε:

1) $\rho < c$: $\exists\ p_j, a_j, d_j$ με
(Ευστάθεια) $p_j > 0,\ a_j > 0,\ d_j > 0$ και
$$\sum p_j = \sum a_j = \sum d_j = 1$$

2) $\rho \geq c$: $p_j = a_j = d_j = 0$ και
$\lim\limits_{t \to +\infty} Q(t) = +\infty$ με πιθ. 1.

4) Βασ. Αποτ. 2: Ιδιότητα μεμονωμένων μεταβάσεων

Θεώρημα: Έστω ευσταθές σύστημα με μεμονωμένες αφίξεις και αναχωρήσεις τότε
$$a_j = d_j$$

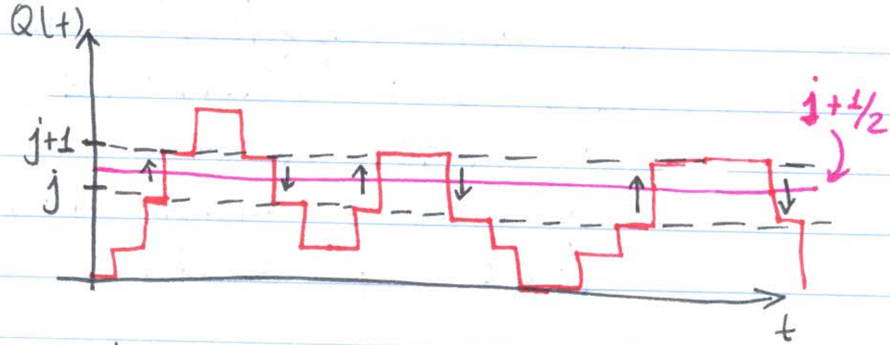
Απόδειξη: $A(t)$ = # αφίξεων στο $(0,t]$
$A_j(t)$ = # αφίξεων που βρίσκουν j-πελάτες
$D(t)$ = # αναχωρήσεων στο $(0,t]$
$D_j(t)$ = " " " "
που αφήνουν j πελάτες

Τότε $a_j = \lim_{t \to +\infty} \frac{A_j(t)}{A(t)}$ (με πιθ 1) $\quad d_j = \lim_{t \to +\infty} \frac{D_j(t)}{D(t)}$ (με πιθ 1)

(I) Όμως $\lim_{t \to +\infty} \frac{A(t)}{t}$ = Μακροπρόθεσμος ρυθμός αφίξεων =

$= \lim_{t \to +\infty} \frac{D(t)}{t}$ = Μακροπρόθεσμος ρυθμός αναχωρήσεων

Αυτό ισχύει επειδή το σύστημα είναι ευσταθές.



Ισχύει $|A_j(t) - D_j(t)| \leq 1$

1 ή −1 ή 0 η διαφορά, εφόσον έχουμε μετρούμενες αφίξεις, αναχωρήσεις και επίσης οι διασχίσεις προς τα πάνω και προς τα κάτω (στο σχήμα ↑, ↓) της $Q(t) = j + 1/2$ εναλλάσσονται

Άρα $\lim_{t \to +\infty} \frac{A_j(t)}{t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{D_j(t)}{t}$ (II)

Από (I), (II) $\Rightarrow$

$$a_j \underset{\substack{\uparrow \\ \text{με πιθ. 1}}}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{A_j(t)}{A(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{A_j(t)/t}{A(t)/t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{D_j(t)/t}{D(t)/t} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{D_j(t)}{D(t)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{με πιθ. 1}}}{=} d_j$$

5) Βασικό Αποτ. 3: Ιδιότητα PASTA

Ευσταθές σύστημα με Poisson διαδικασία αφίξεων $A(t)$ και για κάθε u: $\{Q(t) : t \le u\}$ ανεξ. του $\{A(t) : t \ge u\}$

(lack of anticipation property)

Τότε $p_j = a_j$.

PASTA = Poisson Arrivals See Time Averages

Αιτιολόγηση: $A(t, t+h) = \#$ αφιξ. στο $(t, t+h]$

$$a_j = \lim_{t\to+\infty} \lim_{h\to0^+} P(Q(t)=j \mid A(t,t+h)>0)$$

$$\underset{\text{Bayes}}{=} \lim_{t\to+\infty} \lim_{h\to0^+} \frac{P(Q(t)=j) \cdot P(A(t,t+h)>0 \mid \cancel{Q(t)=j})}{P(A(t,t+h)>0)}$$

lack of ant.

$$= \lim_{t \to +\infty} P(Q(t) = j) = p_j$$

6) Βασ. Αποτ. 4: Νόμος Little

Θεώρημα: Ευσταθές σύστημα αναμονής $\Longrightarrow$

$$E[Q] = \lambda \cdot E[S]$$

Μέσος αριθμός πελατών ($E[Q]$) — Ρυθμός αφίξεων (λ) — Μέσος χρόνος παραμονής ($E[S]$).

Οικονομική Αιτιολόγηση: Έστω ότι υπάρχει κόστος 1 χρημ. μονάδα ανά πελάτη και χρονική μονάδα παραμονής του στο σύστημα

Μέσο συνολικό κόστος ανά χρον. μον. με συνεχή πληρωμή $= E(Q)$

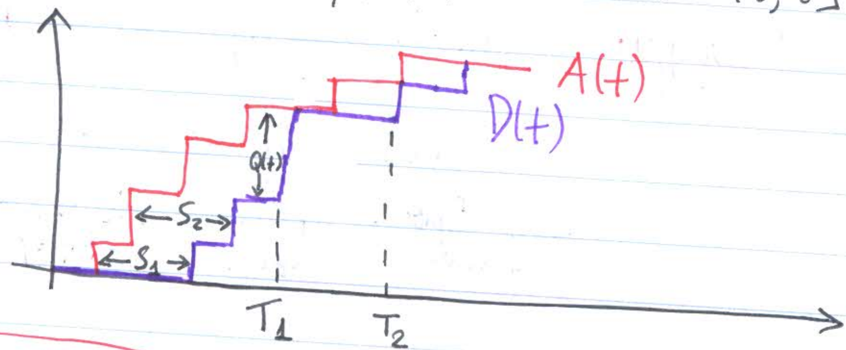
Μέσο συνολικό κόστος ανά χρον. μονάδα με πληρωμή κατά την άφιξη $= \lambda \cdot E[S]$

Οπότε $E[Q] = \lambda E[S]$.

Μαθηματικό σχέδιο Απόδειξης:

- Έστω $T_1, T_2, \ldots$ οι στιγμές που το σύστημα αδειάζει

$Q(t) = \#$ πελ. τη στιγμή t
$S_n =$ Χρονος παραμονής του n-οστού πελ.
$A(t) = \#$ αφίξεων στο $(0,t]$
$D(t) = \#$ αναχωρησεων στο $(0,t]$



$$\boxed{\int_0^{T_n} Q(u)\,du = \sum_{i=1}^{A(T_n)} S_i}$$

Εμβαδό μεταξύ $t=0$, $t=T_n$ $A(t)$ και $D(t)$ $=$

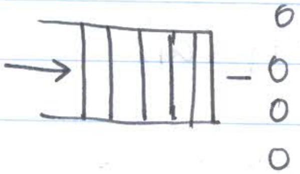
← Το ίδιο που "είπε" η οικονομική αιτιολόγηση.

Σχέδιο αποδ: $E[Q] = \lim_{t\to+\infty} \dfrac{E\left[\int_0^t Q(u)\,du\right]}{t} =$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E\left[\int_0^{T_n} Q(u)\,du\right]}{E[T_n]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{E\left[\sum_{i=1}^{A(T_n)} S_i\right]}{E(T_n)} =$$

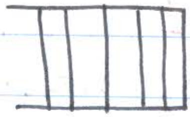
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E[A(T_n)]}{E[T_n]} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{E\left[\sum_{i=1}^{A(T_n)} S_i\right]}{E(A(T_n))} = \lambda \cdot E[S]$$

7) Βασικές συνέπειες του Νόμου Little.



: $E[Q] = \lambda E[S]$

όταν Σύστημα = Χώρος εξυπηρ + Χώρος αναμονής

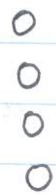


: $E[Q_q] = \lambda \cdot E[W]$

Q_q: # πελ. στην ουρά

W: χρόνος αναμονής στην ουρά

όταν Σύστημα: Χώρος αναμονής



: $E[Q_s] = \lambda \cdot E[X] = \lambda b = \rho$

Q_s: # πελ. σε εξυπηρετ.

X: χρόνος εξυπ.

ρ: ρυθμός υπαυτισμ.

όταν Σύστημα: Χώρος εξυπηρ.

ρ = ρυθμός αναυσισμού $= \lambda b = E\left[\begin{array}{c}\text{\# πελατών} \\ \text{σε διαδικ.} \\ \text{εξυπηρετ.}\end{array}\right] =$

$E\left[\begin{array}{c}\text{\# απασχολημένων} \\ \text{υπηρετών}\end{array}\right]$

Αν έχω GI/GI/c σύστημα τότε

$$\#\text{απασχ. υπηρ} = \sum_{i=1}^{c} I_i \qquad I_i = \begin{cases} 1, & i \text{ απασχολ.} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\rho = E\left[\#\begin{smallmatrix}\text{απασχ.}\\ \text{πελ.}\end{smallmatrix}\right] = E\left[\sum_{i=1}^{c} I_i\right] = \sum_{i=1}^{c} E[I_i] =$$

$$c \cdot P(\text{απασχολ. υπηρέτη}).$$

▶ $P\left(\begin{smallmatrix}\text{απασχολ. υπηρ.}\\ \text{στην } GI/G/c\end{smallmatrix}\right) = \begin{smallmatrix}\text{ποσοστό χρόνου}\\ \text{απασχολ. υπηρ}\end{smallmatrix} = \rho/c$

Ειδικά στο GI/GI/1 σύστημα:

- $E[Q_s] = \rho \Rightarrow 1 \cdot P(Q(s)=1) + 0\, P(Q(s)=0) = \rho$

$$\Longrightarrow \quad \rho = P(Q(s)=1) \Rightarrow$$

$$\rho = P(Q \geq 1) \Rightarrow$$

$$\boxed{1-\rho = P(Q=0)}$$

πιθανότητα κενού συστήματος στην GI/GI/1.