Βασικές Εφαρμογές Θ. Ουρών
Ανάλυση Μέσης Τιμής

1) Βασικά αποτελέσματα

1) Ευστάθεια $GI/GI/c \Leftrightarrow \rho = \lambda b < c$
2) Μεμον. αφίξεις αναχωρ. $\Rightarrow a_j = d_j$
3) Poisson παρατηρήσεις $\Rightarrow a_j = p_j$
4) Ν. Little : $E[Q] = \lambda E[S]$
5) $\rho = E$ [απασχ. υπηρ], P[απασχ. υπηρ] $= \rho/c$

2) ΑΜΤ για $M/M/1/1$

- Poisson(λ) διαδ. αφιξ.
- Exp(μ) χρ. εξυπ.
- 1 υπηρ.
- Χωρητ. 1

$E[Q] = ;$ $E[S] = ;$

2 καταστάσεις 0, 1 για # πελατ.

(I) $E[Q] = \lambda E[S]$ (Ν. Little)

Θεωρούμε έναν αφικνούμενο πελάτη και έστω S ο χρόνος παραμονής στο σύστημα και Q^- το # πελ που βρίσκει κατα την άφιξή του. Άρα,

$$E[S] = E[E[S|Q]] = P(Q^-=0]\,E[S|Q^-=0] + P(Q^-=1]\,E[S|Q^-=1] = a_0 \cdot 1/\mu + a_1 \cdot 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Pasta}}}{=} P_0 \cdot 1/\mu \quad (\text{II})$$

$$(\text{I}),(\text{II}) \Rightarrow \underset{0\cdot P_0 + 1\cdot P_1}{\underset{\shortparallel}{E[Q]}} = \lambda \cdot P_0 \cdot 1/\mu = \rho \cdot P_0 \Rightarrow$$

$$P_1 = \rho \cdot P_0 \quad (\text{III})$$

Και επίσης $P_0 + P_1 = 1$ IV

$$(\text{III}),(\text{IV}) \Rightarrow P_0 = \frac{1}{1+\rho}, \quad P_1 = \frac{\rho}{1+\rho}$$

$$E[Q] = \frac{\rho}{1+\rho}, \quad E[S] = \frac{1}{\mu(1+\rho)}$$

3) ΑΜΤ για την M/GI/1/1

- Poisson(λ) διαδικ. αφίξεων
- Γενική καταν. χρ. εξυπ. $B(x)$ με μέση τιμή b
- 1 υπηρ.
- χωρητικότητα 1

(I) $E[Q] = \lambda\, E[S]$ (Ν. Little)

(II) $E[S] = P_0 \cdot b$ (όπως πριν, Pasta)

(III) $P_1 = \rho \cdot P_0$

(IV) $P_0 + P_1 = 1$ ... Ίδια λύση με πριν με $\rho = \lambda \cdot b$

4) AMT για την M/M/1.

- Poisson(λ) διαδ. αφιξ.
- Exp(μ) χρ. εξυπ.
- 1 υπηρ.
- χωρητικοτητα +∞.

$E[Q] = ;\quad E[S] = ;$

(I) $E[Q] = \lambda E[S]$

Εστω ενας αφικνουμενος πελατης, S χρονος παραμονης του, Q^- το πληθος πελατων που βρισκει στο συστημα.

$$E[S] = E\left[\sum_{i=1}^{Q^-+1} B_i\right]$$ οπου B_i: χρονος εξυπηρ. του πελατη στη θεση i.

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{P(Q^-=n)}_{\substack{\| \\ a_n \xlongequal{PASTA} P_n}} \cdot E\left[\sum_{i=1}^{Q^-+1} B_i \mid Q^-=n\right]$$

$$E\left[\sum_{i=1}^{Q^-+1} B_i \mid Q^-=n\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n+1} B_i \mid Q^-=n\right] =$$

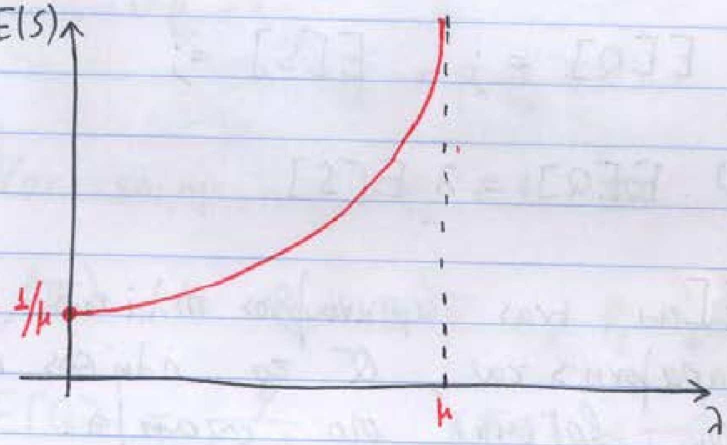
$$n\,1/\mu + E[B_1 \mid Q^-=n] = n \cdot 1/\mu + 1/\mu$$

Επειδή έχω Exp(μ) χρ. εξυπ. δεν μου χρειάζεται η δεσμευση (αμνήμονη ιδιοτητα) αλλιως θα ειχε σημασια!

(II): $E(S) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n \frac{n+1}{\mu} = \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(n+1) = \frac{1}{\mu}\left[E[Q]+1\right]$

$\overset{(I),(II)}{\Rightarrow} \quad E[Q] = \rho\left[E(Q)+1\right] \Rightarrow E[Q] = \frac{\rho}{1-\rho}$

$\Rightarrow E[S] = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$



5) ΑΜΤ για την M/GI/1

(Δεν πάμε όπως πριν γιατί θα κολλήσουμε στο $E[B_1 | Q^- = n]$)

- Poisson(λ) διαδ. αφίξ.
- Γεν. χρ. εξυπ. με καταν. $B(x)$
  $E[B] = b$, $Var(B) = \sigma^2$
- 1 υπηρέτης
- Χωρητικότητα $+\infty$

(I) $E[Q] = \lambda E[S]$

Εστω αφικνουμενος πελάτης, S χρονος παρ.
Q^- το πλήθος πελατων που βρίσκει

$$E[S] = E\left[\sum_{i=1}^{Q^-+1} B_i\right]$$

$$E[S] = P(Q^-=0)\, E\left[\sum_{i=1}^{Q^-+1} B_i \,\middle|\, Q^-=0\right] +$$

$$P(Q^->0)\, E\left[\sum_{i=1}^{Q^-+1} B_i \,\middle|\, Q^->0\right] \quad (\text{II})$$

(III) $\bullet\ P(Q^-=0) = a_0 \overset{PASTA}{=\!=} p_0 \overset{GI/GI/1}{=\!=} 1-\rho \quad , \rho = \lambda b$

(IV) $\bullet\ P(Q^->0) = 1 - P(Q^-=0) = \rho$

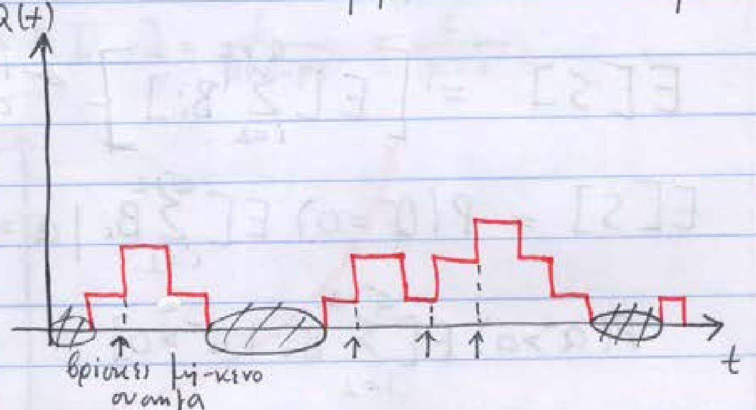
(V) $\bullet\ E\left[\sum_{i=1}^{Q^-+1} B_i \,\middle|\, Q^-=0\right] = b$

(VI) $\bullet\ E\left[\sum_{i=1}^{Q^-+1} B_i \,\middle|\, Q^->0\right] = E\left[\sum_{i=2}^{Q^-+1} B_i \,\middle|\, Q^->0\right] +$

$$+ E[B_1 \mid Q^->0] =$$

$$E[Q^- \cdot b \mid Q^->0] + E[B_1 \mid Q^->0] =$$
$$b\, E[Q^- \mid Q^->0] + E[B_1 \mid Q^->0]$$

Έχω $E[B_1 | Q^- > 0]$ = Μέσος υπολειπ. χρόνος πελάτη που εξυπηρετ. σε στιγμή άφιξης που βρίσκει μη-κενό σύστημα.



Αν θεωρήσω την εξέλιξη του συστήματος μόνο σε περιόδους που είναι μη-κενό τότε οι χρόνοι εξυπηρέτ. δεν σταματούν ποτέ οπότε συνιστούν ανανεωτική διαδικασία

Ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης αυτής της ανάν. διαδ. είναι ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης του πελάτη που εξυπηρετείται

Άρα $E[B_1 | Q^- > 0] = E\left[\begin{matrix}\text{Υπολ. χρόνος ανανέωσης} \\ \text{σε ανάν. διαδ. με ενδιάμ.} \\ \text{χρόνους } \mathcal{B}(x)\end{matrix}\right]$

(VII) $$= \frac{b^2 + \sigma^2}{2b}$$

$E[X|A] = \frac{E[X.1_A]}{P(A)}$

Απο (I)-(VII) $\Longrightarrow$

$$E[Q] = (1-\rho)\lambda b + P(Q^- > 0)\left(\lambda b\, E[Q^- | Q^- > 0] + \frac{\lambda(b^2+\sigma^2)}{2b}\right) \Longrightarrow$$

$$E[Q] = (1-\rho)\rho + \rho\, E[Q^- 1_{\{Q^- > 0\}}] + \lambda b \frac{b^2+\sigma^2}{2b}$$

Έχουμε $Q^- \cdot 1_{\{Q^- > 0\}} = Q^-$ άρα

$$(1-\rho)E[Q] = (1-\rho)\rho + \lambda\rho \frac{b^2+\sigma^2}{2b} \Longrightarrow$$

$$\boxed{E[Q] = \rho + \lambda \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{b^2+\sigma^2}{2b}}$$

και άρα (Ν. Little) $\boxed{E[S] = b + \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{b^2+\sigma^2}{2b}}$

Τύποι των Pollaczek Khinthin

6) Άσκηση

M/M/C $\quad \lambda = 5$ αφιξ/ώρα

$b = 78$ λεπτά

i) Ελάχιστο # υπηρετών c για ευστάθεια

ii) " " " " ώστε το ποσοστό χρόνου απασχόλησης υπηρέτη να είναι το πολύ 80%.

Λύση: i) Ευστάθεια $\Leftrightarrow \rho < c \Leftrightarrow$

προσοχή! Ίδια μονάδα χρόνου
(ή ώρες ή λεπτά και τα 2)

$\lambda b < c \iff 5 \cdot \frac{78}{60} < c$

Άρα ελάχιστο $c = 7$.

ii) Ποσοστό χρ. απασχ. υπηρ. $\leq 80\% \Rightarrow \frac{\rho}{c} \leq 0,8 \iff$

$c \geq \frac{78}{12 \cdot 0,8} = \ldots$

7) Άσκηση

$GI / GI / +\infty$

Ενδιάμ. χρ. αφίξ. $= a$

Μέσος χρ. εξυπ. $= b$

$E[Q] = ;$

Λύση: $E[Q] = \lambda E[S] = \frac{1}{a} \cdot b = b/a$

έχω άπειρους υπηρέτες
άρα με το που έρχεται
ο πελάτης εξυπηρετείται

Ουρές Αναμονής / Απλές Μαρκοβιανές Ουρές

1) Ορισμός

Απλή Μαρκοβιανή Ουρά $\iff$ $\{Q(t)\}$ ($Q(t) = \#$ πελ. την στιγ. t) είναι μαρκοβ. αλυσίδα τύπου γέννησης θανάτου

$$0 \rightleftarrows 1 \rightleftarrows 2 \rightleftarrows 3$$

$$\iff P(Q(t+h)=j \mid Q(u): 0 \le u < t,\ Q(t)=i) =$$

$$= \begin{cases} \lambda_i h + o(h) & , j = i+1 \\ \mu_i h + o(h) & , j = i-1 \\ 1-(\lambda_i+\mu_i)h + o(h) & , j = i \\ o(h) & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

όπου $\frac{o(h)}{h} \longrightarrow 0$ καθώς $h \to 0^+$

λ_i: δεσμευμένος ρυθμός αφίξεων στην καταστ. i
$= \#$ μεταβ $i \to i+1$ για την $\{Q(t)\}$ ανά χρον. μονάδα παραμονής στην i

μ_i: δεσμευμένος ρυθμός εξυπηρ στην κατ. i
$= \#$ μεταβ $i \to i-1$ για την $\{Q(t)\}$ ανά χρον μονάδα παραμονής στην i

• Ενδιαφερόμαστε για την P_j

$P_j = P(Q=j) =$ (Μακροπρόθεσμο) ποσοστό χρόνου που υπαρχουν j πελατες

$t \geq 0$ $\quad S_j(t) =$ Χρονος στο $[0,t]$ που η $\{Q(t)\}$ "περνάει" στην j

$A_j(t) =$ Μεταβασεις τυπου $j \to j+1$ της $\{Q(t)\}$ στο $(0,t]$

$=$ # αφιξεων στο $[0,t]$ πού βλεπουν j πελ.

$D_j(t) =$ Μεταβασεις τυπου $j+1 \to j$ της $\{Q(t)\}$ στο $(0,t]$

$=$ # αναχωρ. στο $(0,t]$ πω αφήνουν j - πελατες (πισω τους)

Τοτε: $\quad P_j(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{S_j(t)}{t}$ με πιθ. 1

$\lambda_j = \lim_{t \to +\infty} \frac{A_j(t)}{S_j(t)}$ με πιθ 1

δεν διαιρω με t γιατι το λ_j ειναι #μεταβάσεων $j \to j+1$ ανα χρονική μονάδα παραμονής στην κατ. i

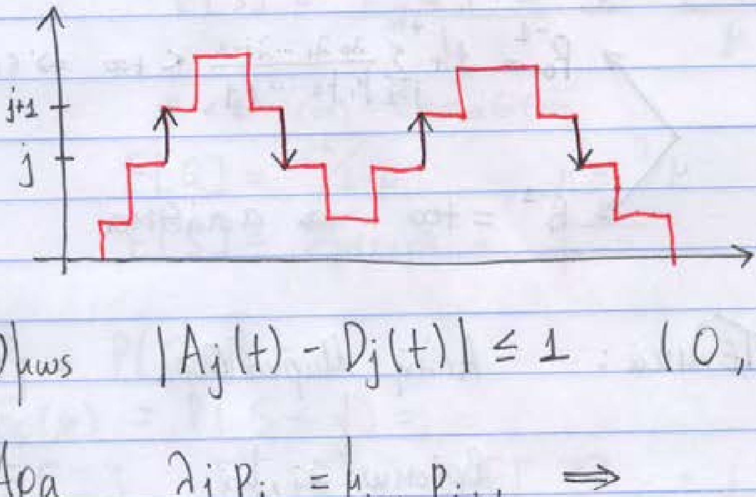
$\mu_j = \lim_{t \to +\infty} \frac{D_{j-1}(t)}{S_j(t)}$ με πιθ. 1.

οποτε $\lambda_j p_j = \lim_{t \to +\infty} \frac{A_j(t)}{t}$ με π.θ. 1.

Αυτό είναι ο ρυθμός μεταβάσεων $j \to j+1$ ανα χρονική μονάδα (γενικως).

$$\mu_{j+1} p_{j+1} = \lim_{t \to +\infty} \frac{D_j(t)}{t}$$ με π.θ. 1

Ρυθμος μεταβάσεων $j+1 \to j$ ανα χρονική μονάδα.



Ομως $|A_j(t) - D_j(t)| \le 1$ $(0, 1$ ή $-1)$

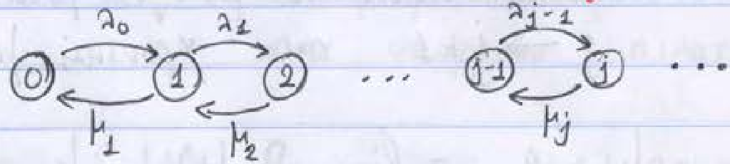
Αρα $\lambda_j p_j = \mu_{j+1} p_{j+1} \Rightarrow$

$$p_{j+1} = \frac{\lambda_j}{\mu_{j+1}} p_j \qquad j = 0, 1, 2, \dots$$

Αρα $p_j = \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} p_{j-1} = \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} \cdot \frac{\lambda_{j-2}}{\mu_{j-1}} p_{j-2} = \dots \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad P_j = \frac{\lambda_0\cdot\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_{j-1}}{\mu_1\cdot\mu_2\cdot\ldots\cdot\mu_j}\, P_0$$

Τυπος γινομένου για την οριακή κατανομή αλυσίδων γέννησης - θανάτου



Το P_0 βρισκεται απο την εξίσωση κανονικοποίησης

$$\sum_{j=0}^{+\infty} P_j = 1 \Rightarrow p_0\left(1+\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_j}\right) = 1$$

$B^{-1} = 1+\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_j} < +\infty \Rightarrow$ ευσταθεια

$B^{-1} = +\infty \Rightarrow$ ασταθεια

Τελικά: Απλή Μαρκοβ. Ουρά

$\downarrow$

Βρίσκω λ_j, μ_j

$\downarrow$

$B^{-1} = 1+\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_j}$ — $<+\infty$ ευσταθεια; $=+\infty$ ασταθεια

$\downarrow$ Ευσταθεια

$$P_j = \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_j}\cdot B$$

2) Η M/M/1 ουρά

- Poisson (λ) διαδ. αφίξεων
- Exp(μ) χρ. εξυπ.
- 1 υπηρέτης
- +∞ χωρητικότητα
- FCFS

• ΑΜΤ: $E[Q] = \lambda E[S]$ N. Little
$E[S] = \dfrac{E[Q]+1}{\mu} \overset{\text{PASTA}}{\downarrow} \dfrac{E[Q]+1}{\mu}$ $\Big\} \Rightarrow$

$\rho < 1 \iff$ Ευστάθεια

$E[Q] = \rho / 1-\rho \quad , \quad \rho = \lambda/\mu$

$E[S] = 1/\mu(1-\rho) = \dfrac{1}{\mu-\lambda}$

- $P_j = P(Q=j) =$;
- $F_S(x) = P(S \le x) =$;
- $E[I]$, $E[Y]$, $E[Z]$ = ;

χρονος αργίας, χρονος ανεχους λειτουργίας, κυκλος λειτουργίας

Μεμον. αφίξεις + αναχωρ $\Longrightarrow$ Απλή ουρά
Exp(λ), Exp(μ) $\Rightarrow$ Μαρκοβιανή ουρά

$\lambda_j = \lambda \quad \forall j \ge 0 \quad , \quad \mu_j = \mu \quad \forall j \ge 1$

$$B^{-1} = 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{\mu^j} = 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} (\lambda/\mu)^j =$$

$$1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \rho^j = \sum_{j=0}^{+\infty} \rho^j \begin{cases} \frac{1}{1-\rho} & , \rho<1 \text{ Ευστάθεια} \\ +\infty & , \rho \geq 1 \text{ αστάθεια} \end{cases}$$

Ευστάθεια $\rightarrow B = 1-\rho$

- $P_j = \frac{\lambda_0 \cdot \ldots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \cdot \ldots \mu_j} P_0 \quad , \quad P_0 = B = 1-\rho \implies$

$$P_j = (1-\rho)\rho^j \quad , j \geq 0$$

(Γεωμετρική κατανομή)

$$E[Q] = \sum_{j=0}^{+\infty} j P_j = \frac{\rho}{1-\rho}$$

- $F_S(x) = P(S \leq x) \overset{\text{ΘΟΠ}}{=} \sum_{j=0}^{+\infty} P(Q^- = j) \cdot P(S \leq x \mid Q^- = j)$

$$P(Q^- = j) = a_j \overset{\text{PASTA}}{=} P_j = (1-\rho)\rho^j$$

$$P(S \mid Q^- = j) \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{j+1} B_i \quad \text{όπου } B_i \sim exp(\mu) \text{ ανεξάρτητα}$$

$$\implies P(S \mid Q^- = j) \sim Erlang(j+1, \mu)$$

Άρα $P(S \leq x \mid Q^- = j) = \int_0^x \frac{\mu^{j+1}}{j!} u^j e^{-\mu u} \, du$

Άρα $F_X(s) = \sum_{j=0}^{+\infty} (1-\rho)\rho^j \int_0^x \frac{\mu^{j+1}}{j!} u^j e^{-\mu u} \, du =$

$$= \int_0^x (1-\rho)\,\mu\, e^{-\mu u} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\rho\mu u)^j}{j!} \, du =$$

$$= \int_0^x (1-\rho)\mu\, e^{-\mu u}\, e^{\rho\mu u} \, du =$$

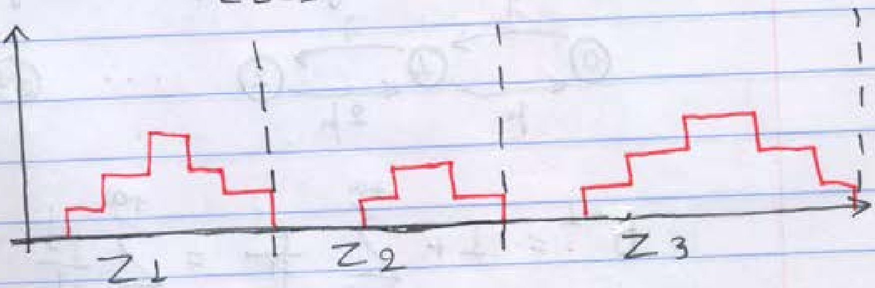
$$= \int_0^x \underbrace{(1-\rho)\mu\, e^{-\mu(1-\rho)u}}_{f_S(u)} \, du$$

Άρα $\quad S \sim Exp(\mu(1-\rho)) \Rightarrow E[S] = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$

- $I \sim exp(\lambda) \Rightarrow E[I] = 1/\lambda$

ΣΑΘΚ →κυκλος = 1 οταν συστημα ειναι κενό

- $P_0 \overset{\downarrow}{=} \frac{E[I]}{E[Z]} \Rightarrow E[Z] = \frac{E[I]}{P_0}$



$$\Rightarrow E[Z] = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}$$

- $E[Z] = E[I] + E[Y] \Rightarrow$

$$E[Y] = \frac{1}{\lambda(1-\rho)} - \frac{1}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} \overset{\rho=\lambda/\mu}{=\!=} \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

Παρατήρηση: Εδώ έχουμε $E[Y] = E[S]$ που είναι διαισθητικά περίεργο.

3) Η $M/M/+\infty$ Ουρά

- Poisson(λ) διαδ. αφίξεων
- Exp(μ) χρ. εξυπ.
- $+\infty$ υπηρέτες

$$F_S(x) = 1 - e^{-\mu x} \quad x > 0$$

Είναι απλή Μαρκοβιανή ουρά ✓

$\lambda_j = \lambda$, $\mu_j = j \cdot \mu$. ← ο πρώτος που θα φύγει από j exp(μ) → min από j exp(μ)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "2\mu"] & \cdots & j-1 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & j \arrow[l, bend left, "j\mu"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$B^{-1} = 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\rho^j}{j!} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\rho^j}{j!} = e^{\rho} < +\infty$$

Πάντα ευσταθής (προφανώς αφού έχω $+\infty$ υπηρέτες)

$$P_j = e^{-\rho} \, \rho^j / j! \qquad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$Q \sim \text{Poisson}(\rho)$$

$$E[I] = 1/\lambda$$

$$p_0 \overset{\Sigma\Lambda\Theta K}{=} \frac{E[I]}{E[Z]} \Rightarrow E[Z] = \frac{E[I]}{p_0} = \frac{1}{\lambda e^{-\rho}} = \frac{e^{\rho}}{\lambda}$$

$$E[Y] = E[Z] - E[I] = \frac{e^{-\rho} - 1}{\lambda}.$$