Ουρές Αναμονής - Ασκήσεις

1) Ευστάθεια $\iff \rho = \lambda b < c$ GI/GI/c

2) Μεμονωμένες αφίξεις + αναχωρήσεις $\Rightarrow a_j = d_j$

3) Poisson αφίξεις $\Rightarrow a_j = p_j$

4) $E(Q) = \lambda E[S]$

5) Απλή Μαρκοβιανή Ουρά : Υπολογίζω,

- $B^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n}$ $\begin{cases} < +\infty & \text{ευστάθεια} \\ = +\infty & \text{αστάθεια} \end{cases}$

- $P_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_j} P_0 \quad j \geq 1, \quad P_0 = B$

2) Ασκηση 4 / Ενότητα 5

- 2 τύποι πελατών $i = 1, 2$
- Αφίξεις πελατών τύπου i με διαδικασία Poisson(λ_i) $i = 1, 2$.
- Exp(μ) χρόνοι εξυπηρέτησης
- 1 υπηρέτης
- Πελάτες τύπου 1 έχουν απόλυτη προτεραιότητα έναντι τύπου 2.

αν υπάρχει πελάτης τύπου 2 που εξυπηρετείται σταματάει η εξυπηρέτηση αν έρθει πελάτης τύπου 1.

i) Q_i = # πελ. τύπου i στο σύστημα

ii) $E(Q_1) =;$ $E(Q_2) =;$

Απάντηση: Αν περιοριστώ στο σύστημα Σ_1: πελάτες τύπου 1 + υπηρέτες, αυτό δεν επηρεάζεται από πελάτες τύπου 2

Είναι M/M/1 με ρυθμό αφίξεων λ_1 και ρυθμό εξυπηρέτησης μ

i) $$\left.\begin{aligned} E(Q_1) &= \lambda_1 E[S_1] \\ E[S_1] &= \frac{E[Q_1]+1}{\mu} \end{aligned}\right\} \Rightarrow E[Q_1] = \frac{\rho_1}{1-\rho_1}$$

όπου $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu}$

Επίσης το σύστημα "πελάτες τύπου 1+2 και υπηρέτες" είναι M/M/1 ουρά με μια μη - FIFO πειθαρχική, άρα δεν επιλέγει πελάτες με βάση το χρόνο άφιξης.

Εδώ $E(Q_1+Q_2) = \frac{\rho}{1-\rho}$ όπου $\rho = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu}$

Άρα $E(Q_2) = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\rho_1}{1-\rho_1}$

Εναλλακτικά ίδια για $E(Q_2)$ έχουμε

$E(Q_2) = \lambda_2 E(S_2)$

$E(S_2) = (E(Q_2) + E(Q_1) + 1)\cdot(1/\mu +$

$+ 1/\mu \cdot E\left(\begin{matrix}\text{\# πελ. τύπου 1 σε χρόνο} \\ \text{αναμονής λειτουργίας M/M/1}\end{matrix}\right)$

κλπ.

3) Άσκηση 5 / Ενοτητα 5

- Poisson διαδ. αφιξεων ρυθμου λ
- $Exp(\mu)$ χρ. εξυπ.
- 1 υπηρετης
- $+\infty$ χωρητικοτητα
- Αδειασμα → Ακαριαια "απενεργοποιηση" υπηρετών
- Όταν εχω άφιξη σε κενό συστημα → Εναρξη χρονου "ενεργοποιησης" $\sim Exp(\theta)$

$E(Q), E(S) = ;$

Απάντηση: $E(Q) = \lambda E(S)$

Θεωρω πελάτη τη στιγμή της άφιξης του και εστω Q^- = το # πελατων που βρισκει και I^- την κατάσταση του υπηρέτη.

$$I^- = \begin{cases} 1, & \text{ενεργος} \\ 0, & \text{απενεργ.} \end{cases}$$

Τοτε λογω PASTA $Q \overset{d}{=} Q^-$, $I^- \overset{d}{=} I$

$$E[S] = P(I^- = 0) \cdot \frac{1}{\theta} + \qquad \cdot \frac{E(Q^- + 1)}{\mu}$$

Επεξήγηση: $E[S] = P(I^- = 0) \cdot E[S \mid I^- = 0] +$

$P(I^- = 1) \cdot E[S \mid I^- = 1] =$

$P(I^- = 0)\left(1/\theta + \frac{E(Q^-)+1}{\mu}\right) +$

$+ P(I^- = 1)\left(\frac{E(Q^-)+1}{\mu}\right) =$

$$P(I^- = 0)\, 1/\theta + \underbrace{\left(P(I^- = 0) + P(I^- = 1)\right)}^{1} \frac{E(Q^-)+1}{\mu}$$

Επίσης, Θ. Little στο χώρο εξυπηρέτησης έχω $E[Q_S] = \lambda E[S_S] = \lambda \cdot 1/\mu$

$P(Q_S = 1) = P(I^- = 1)$

$\Rightarrow P(I^- = 1) = \rho \xrightarrow{PASTA} P(I^- = 0) = 1 - \rho$

Άρα $E[Q] = \lambda E[S] = \lambda\left((1-\rho)1/\theta + \frac{E(Q)+1}{\mu}\right)$

$\Rightarrow (1-\rho)E(Q) = (1-\rho)\lambda/\theta + \rho \Rightarrow$

$E(Q) = \lambda/\theta + \rho/(1-\rho)$

$E(S) = 1/\theta + 1/(\mu(1-\rho))$

4) Άσκηση 8

- M/M/1
- λ ρυθμός άφιξης
- μ ρυθμός εξυπ.
- $Exp(\nu)$ χρόνος υπομονής άρα πελάτη ~~στο~~ που είναι στον χώρο αναμονής

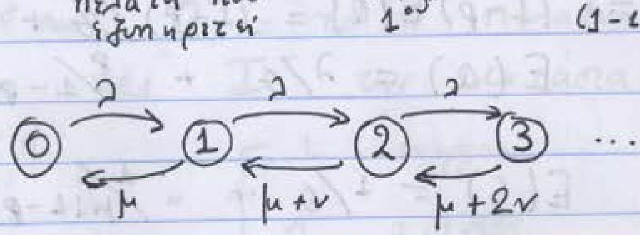
Θέλω για $\nu = \mu$ να βρεθεί η $P_j = P(Q=j)$

Απάντηση: Έχουμε απλή μαρκοβιανή ουρά με

$\lambda_j = \lambda$

$\mu_j = \mu + (j-1)\nu$

Ο χρόνος για μετάβαση $j \to j-1$ είναι το $\min(\underbrace{Exp(\mu)}_{\text{Χρ. εξυπ. του πελάτη που εξυπηρετεί}}, \underbrace{Exp(\nu)}_{\text{χρόνος υποµ. } 1^{ου}}, \ldots, \underbrace{Exp(\nu)}_{\text{χρόνος υποµ. } (j-1)^{ου}})$



Για $\nu = \mu$ έχω $\lambda_j = \lambda$, $\mu_j = j\mu$

$$B^{-1} = \sum_{j=1}^{+\infty} (\lambda/\mu)^j \cdot \frac{1}{j!} + 1 = e^{\rho}$$

όπου $\rho = \lambda/\mu$ → ευσταθεία αφού πεπερ.

$$P_0 = B = e^{-\rho}$$

$$P_j = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_j} \cdot P_0 = e^{-\rho}\, \rho^j / j!$$

$$P_j \sim Poisson(\rho)$$

5) Άσκηση 9

- M/M/1
- λ ρυθμός αφίξεων
- μ ρυθμός εξυπηρ.
- Αποθαρρυνόμενοι πελάτες

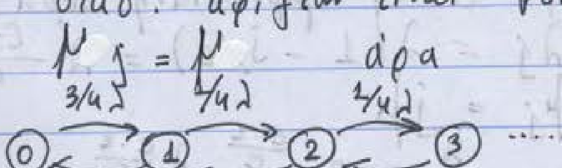
$$P(\text{αναχ. πελάτη / βρίσκει } n) = q_n = \begin{cases} 1/4, & n=0 \\ 3/4, & n \geq 1 \end{cases}$$

Απάντηση: Έχουμε απλή μαρκοβιανή ουρά:

$\lambda_j = \lambda(1 - q_j)$ ο χρόνος για μετάβαση από $j \to j+1$ είναι ο χρόνος ως την είσοδο ενός πελάτη στο σύστημα.

Η διαδ. αφίξεων είναι $poisson(\lambda(1-q_j))$

$\mu_j = \mu$ άρα



$$B^{-1} = 1 + \sum^{+\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \dots \mu_j} = 1 + \frac{\sum (3/4)(1/4)^{j-1} \lambda^j}{\mu^j} =$$

$$= 1 + (3/4)\rho \sum^{+\infty} (\rho/4)^{j-1} = \begin{cases} \frac{4+2\rho}{4-\rho} & \rho \leq 3 \text{ ευσταθ.} \\ +\infty, & \rho \geq 4 \text{ αστάθεια} \end{cases}$$

Άρα $P_j = \begin{cases} B & j=0 \\ \dfrac{\lambda_0 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \cdots \mu_j} B & j \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$P_j = \begin{cases} \dfrac{4-\rho}{4+2\rho} & j=0 \\ \dfrac{3\rho^j(4-\rho)}{4^j \cdot (4+2\rho)} & j \geq 1. \end{cases}$$

6) Άσκηση 12

- $M/M/c/c$ ουρά
- λ: ρυθμός αφίξεων
- μ: ρυθμός εξυπηρέτησης
- P(αναχωρ. πελ. | βλέπει n) $= n/c \quad 0 \leq n \leq c$

(i) $P_n = j$ και είδος κατανομής.
(ii) Μακροπρόθ. ποσοστό χαμένων πελατών
(iii) $E(S)$ (για όλους τους πελάτες)
$E(S')$ (για τους εισερχόμενους πελάτες)

Απάντηση: Απλή Μαρκοβιανή ουρά

$\lambda_j = \lambda(1 - j/c) = \lambda \frac{c-j}{c} \quad 0 \leq j \leq c-1$

$\mu_j = j\mu$

$$0 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} 1 \underset{2\mu}{\overset{\lambda \cdot \frac{c-1}{c}}{\rightleftarrows}} 2 \underset{3\mu}{\overset{\lambda \frac{c-2}{c}}{\rightleftarrows}} 3 \quad \cdots$$

Εδώ $\dfrac{\lambda_0 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \cdots \mu_j} = \dfrac{c!\,(\lambda/c)^j}{j!\,\mu^j\,(c-j)!} = \binom{c}{j}\left(\dfrac{\lambda}{c\mu}\right)^j$

$$B^{-1} = 1 + \sum_{i=1}^{c} \binom{c}{j} \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^j = \sum_{j=0}^{c} \binom{c}{j} \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^j =$$

$$= (1 + \lambda/c\mu)^c$$

Άρα $$P_j = \begin{cases} B & j = 0 \\ B \dfrac{\lambda_0 \ldots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \ldots \mu_j} & j \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$P_j = \begin{cases} \left(\dfrac{c\mu}{\lambda + \mu c}\right)^c & j = 0 \\ \binom{c}{j} \left(\dfrac{\lambda}{c\mu}\right)^j \dfrac{(c\mu)^c}{(\lambda + c\mu)^c} & j \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$P_j = \binom{c}{j} \left(\frac{\lambda}{\lambda + c\mu}\right)^j \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + c\mu}\right)^{c-j} \quad j \geq 0$$

άρα $P_j \sim Bin(c, \lambda/\lambda + c\mu)$

Ασκήσεις

1) Άσκηση 2/7

$\{N(t)\}$ αναν. διαδ. , $F_X(t)$ σκ ενδιαμ. χρόνων
$h(t) = E[N(t)(N(t)-1)]$

→ Ανανεωτική εξίσωση + $h(t) = 2\,(m * m)(t)$
οπου $m(t)$ η αναν. συνάρτ.

Απάντηση. X_1: Χρονος $1^{ης}$ γεγ.

$$h(t) = \int_0^{+\infty} E[N(t)(N(t)-1) \mid S_1 = u]\, dF_X(u)$$

• $$E[N(t)(N(t)-1) \mid S_1 = u] = \begin{cases} 0 & , u > t \\ E[(1+N(t-u))\,N(t-u)] & , u \le t \end{cases}$$

Αιτιολογηση για $u \le t$:

$$\underset{0}{|}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\overset{\downarrow 1^{o}\text{ γεγ.}}{\underset{u}{|}}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\underset{t}{|}\!\!-\!\!-$$

$$(N(t) \mid S_1 = u) \overset{d}{=} 1 + N(t-u)$$

• Ομως $E[(1+N(t-u))\,N(t-u)] =$
$E[(2 + (N(t-u)-1))\,N(t-u)] =$
$2\,E[N(t-u)] + E[(N(t-u)-1)\,N(t-u)] =$
$2\, m(t-u) + h(t-u)$

Άρα $h(t) = \int_0^t \left(2m(t-u) + h(t-u)\right) d F_X(u) =$

$$= \underbrace{2\int_0^t m(t-u)\, dF_X(u)}_{d(t)} + (h * F_X)(u)$$

ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$

Η λύση της αναν. εξίσωσης είναι

$h(t) = d(t) + (d * m)(t) =$

$= 2(m * F_X)(t) + 2(m * F_X * m)(t)$

Ξέρουμε όμως από την ανάν. εξίσωση για την ανάν. συνάρτηση $m(t) = E[N(t)]$

$m(t) = F_X(t) + (F_X * m)(t)$

Άρα $h(t) = 2(m(t) - F_X(t)) + 2(m * (m - F_X))(t)$

$= \cancel{2m(t)} - \cancel{2F_X(t)} + 2(m * m)(t) - 2\cancel{(m * F_X)}(t)$

$= 2(m * m)(t)$

2) Άσκηση 2/10 (Δυσκολη άσκηση)

$\{N(t)\}$ αναν. διαδ., $F_X(t)$ σ.κ. ενδ.χρ. με μέση τιμή $\mu \in (0, +\infty)$ και διασπορά $\sigma^2 \in (0, +\infty)$.

$m(t) = E[N(t)]$, $h(t) = m(t) - t/\mu$.

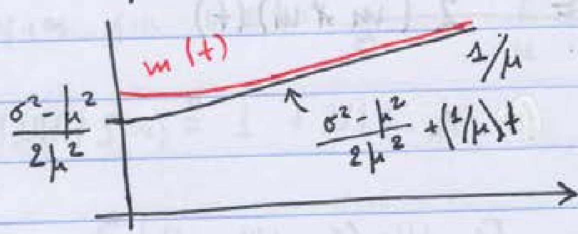
i) Νδο $h(t) = d(t) + (h * F_X)(t)$

με $d(t) = \int_0^t (1 - u/\mu)\, dF_X(u) - \int_t^{+\infty} t/\mu \, dF_X(u) =$

$= 1/\mu \int_t^{+\infty} (1 - F_X(u))\, du - (1 - F_X(t))$

ii) Νδο $\lim_{t \to +\infty} h(t) = \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2}$

(δλδ η ευθεία $\frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2} + (1/\mu)t$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $m(t)$)



Απάντηση: i) S_1 ο χρόνος $1^{ου}$ γεγ. της $\{N(t)\}$

$h(t) = \int_0^{+\infty} E[N(t) \mid S_1 = u]\, dF_X(u) - t/\mu$

• $E[N(t) \mid S_1 = u] = \begin{cases} 0 & u > t \\ 1 + E[N(t-u)] & u \le t \end{cases}$

$E[N(t-u)] = h(t-u) + (t-u)/\mu$, δηλ. $1 + h(t-u) + (t-u)/\mu$

Άρα $h(t) = \int_0^t \left(1 + h(t-u) + \frac{t-u}{\mu}\right) dF_X(u) - t/\mu \Rightarrow$

$$h(t) = \underbrace{\int_0^t \left(1 + \frac{t-u}{\mu}\right) dF_X(u) - t/\mu}_{d(t)} + \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u)$$

Έχουμε $d(t) = \frac{t}{\mu}\left(\int_0^t dF_X(u) - 1\right) + \int_0^t \left(1 - \frac{u}{\mu}\right) dF_X(u)$

$$\left[= \frac{1}{\mu}\int_t^{+\infty} (1 - F_X(u))\, du - (1 - F_X(t)) \right]$$ ← Θέλω να δείξω αυτό

$$= \int_0^t (1 - u/\mu)\, dF_X(u) - \frac{t}{\mu}\int_t^{+\infty} dF_X(u)$$

$$= \left[(1 - u/\mu) F_X(u)\right]_{u=0}^{t} + 1/\mu \int_0^t F_X(u)\, du$$

$$- t/\mu\, (1 - F_X(t))$$

$$= (1 - t/\mu) F_X(t) + 1/\mu \int_0^t F_X(u)\, du - \frac{t}{\mu}(1 - F_X(t))$$

$$= F_X(t) - \cancel{\frac{t}{\mu} F_X(t)} + 1/\mu \int_0^t F_X(u)\, du - \frac{t}{\mu} + \cancel{\frac{t}{\mu} F_X(t)}$$

$$= (F_X(t) - 1) + 1 + 1/\mu \int_0^t F_X(u)\, du - \frac{1}{\mu}\int_0^t du =$$

$$= -(1 - F_X(t)) + 1 - 1/\mu \int_0^t (1 - F_X(u))\, du =$$

$$= -(1 - F_X(t)) + \frac{\mu}{\mu} - 1/\mu \int_0^t (1 - F_X(u))\, du =$$

$$= -(1-F_X(t)) + \frac{\int_0^{+\infty}(1-F_X(u))du - \int_0^{t}(1-F_X(u))du}{\mu} =$$

$$= 1/\mu \underbrace{\int_t^{+\infty}(1-F_X(u)\,du}_{d_1(t)} - \underbrace{(1-F_X(t))}_{d_2(t)}$$

$d(t) = d_1(t) - d_2(t)$ με $d_1(t), d_2(t) \geq 0$ φθίνουσες και φραγμένες

και $\int_0^{+\infty}|d(t)|dt \leq \int_0^{+\infty} d_1(t)\,dt + \int_0^{+\infty} d_2(t)\,dt$

Σε αυτούς τους υπολογισμούς → προσπαθούμε να εμφανίσουμε $dF_X(x)$.

$$\bullet \int_0^{+\infty} d_1(t)\,dt = 1/\mu \int_0^{+\infty}\int_t^{+\infty}(1-F_X(u)\,du\,dt =$$

$$1/\mu \int_0^{+\infty}\int_t^{+\infty}\int_u^{+\infty} dF_X(x)\,du\,dt. \;\underline{\underline{0<t<u<x<+\infty}}$$

$$= 1/\mu \int_0^{+\infty}\int_0^{x}\underbrace{\int_0^{u} dt}_{u}\,du\,dF_X(x) =$$

$$= 1/\mu \int_0^{+\infty}\int_0^{x} u\,du\,dF_X(x) =$$

$$1/\mu \int_0^{+\infty} x^2/2\,dF_X(u) = \frac{1}{2\mu}\cdot E[X^2] =$$

$$\frac{1}{2\mu}(\mu^2 + \sigma^2) < +\infty.$$

$$\bullet \int_0^{+\infty} d_2(t)\,dt = \int_0^{t} (1 - F_X(t))\,dt = \mu < +\infty$$

Άρα $\int_0^{+\infty} |d(t)|\,dt < +\infty$ άρα εφαρμόζεται το βασικό ανανεωτικό θεώρημα.

$$\text{Άρα } \lim_{t \to +\infty} h(t) = \frac{\int_0^{+\infty} d(t)\,dt}{\mu} = \frac{\int_0^{+\infty} d_1(t)\,dt - \int_0^{+\infty} d_2(t)\,dt}{\mu}$$

$$= \frac{\frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu} - \mu}{\mu} = \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2}$$

3) Άσκηση 3/13.

Μηχάνημα με $Exp(\lambda)$ χρ. ζωής κατά μέσο όρο

Επιθεωρείται κάθε $\tau = 1/\mu$ χρ. μονάδες

1) Είτε ντετερμινιστικά τις στιγμές $0, \tau, 2\tau, \dots$

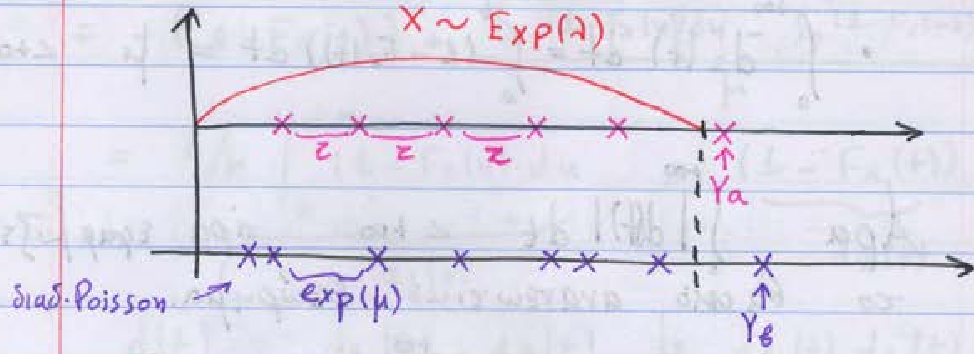
2) Είτε τις στιγμές μιας σ.δ. Poisson με ρυθμό μ.

Y_a = χρόνος αποκάλυψης βλάβης με ντετερμ. διαδ.

Y_b = χρονος αποκαλ. βλάβης με Poisson διαδ.

$E[Y_a] = ;$, $E[Y_b] = ;$

Ποιά διαδικασία είναι προτιμότερη;



Απάντηση: $E[Y_\beta] = E[\text{Χρονος λειτουργίας}] + E[\text{Υπολ. χρονος επιθεώρησης}] \underset{\text{ιδιότητα}}{\overset{\text{αμνήμονη}}{=}} 1/\lambda + 1/\mu = 1/\lambda + \tau.$

$$E[Y_a] = E\left[\left(\left\lfloor \frac{X}{\tau} \right\rfloor + 1\right) \cdot \tau\right] =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\left\lfloor \frac{x}{\tau} \right\rfloor + 1\right)\tau \cdot f_X(x)\, dx =$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\left\lfloor \frac{x}{\tau} \right\rfloor + 1\right)\tau \lambda e^{-\lambda x}\, dx =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} (n+1)\tau\lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\tau \underbrace{\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \lambda e^{-\lambda x} dx}_{=}$$

$$P(n\tau \le X \le (n+1)\tau) =$$

$$P(X \le (n+1)\tau) - P(X \le n\tau) =$$

$$\lambda e^{-\lambda n\tau} - e^{-\lambda(n+1)\tau}$$

Άρα $E[Y_\alpha] = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\tau e^{-\lambda n\tau} - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\tau e^{-\lambda(n+1)\tau}$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\tau e^{-\lambda\tau n} - \sum_{k=1}^{+\infty} k\tau e^{-\lambda k\tau} =$$

$$= \cancel{\sum_{n=0}^{+\infty} n\tau e^{-\lambda\tau n}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \tau e^{-\lambda\tau n} - \cancel{\sum_{k=1}^{+\infty} k\tau e^{-\lambda k\tau}} =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \tau e^{-\lambda\tau n} = \tau \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-\lambda\tau}\right)^n = \frac{\tau}{1-e^{-\lambda\tau}}$$

$$E[Y_\alpha] = \frac{\tau}{1-e^{-\lambda\tau}} \qquad E[Y_\beta] = 1/\lambda + \tau$$

$$E[Y_\beta] - E[Y_\alpha] = 1/\lambda + \tau - \frac{\tau}{1-e^{-\lambda\tau}} =$$

$$\frac{1-e^{-\lambda\tau} + \lambda\tau(1-e^{-\lambda\tau}) - \lambda\tau}{\lambda(1-e^{-\lambda\tau})} =$$

$$\frac{1-e^{-\lambda\tau} - \lambda\tau e^{-\lambda\tau}}{\lambda(1-e^{-\lambda\tau})} \geq 0$$