18/2/19 Μάθημα 1

Σ.μ.ΕΕ.

"Στόχος": να βελτιστοποιήσω (αφού μοντελοποιήσω κατάλληλα)

① Τεχνικές - Πεδία Εφαρμογών σημαντική για λήψη αποφάσεων

2 εβδομάδες

1) Πιθανότητες ($\underbrace{\text{Δεσμευμένη Μέση Τιμή}}$, $\underbrace{\text{Πιθανογεννήτριες}}_{\text{για διακριτές τ.μ.}}$, Μετασχηματισμοί Laplace-Stieltjes, Εκθετική κατανομή)

Laplace-Stieltjes: για διακριτές και συνεχείς τ.μ. (βοηθούν στη μελέτη αθροισμάτων)

Εκθετική κατανομή: Βασική κατανομή στην Επιχειρησιακή Έρευνα (όπως η κανονική στη στατιστική)

3-4 εβδομάδες

"πότε θα συμβεί το n-οστό γεγονός?" ή "τη στιγμή t πόσα γεγονότα έχουν συμβεί?"

2) Ανανεωτική Θεωρία (Ανανεωτικές διαδικασίες, Δομές κόστους)

Ανανεωτικές διαδικασίες: βασιζόμαστε στη στοχαστική περιοδικότητα για να αποτιμήσουμε μέτρα απόδοσης

2 εβδομάδες

ειδική περίπτωση ανανεωτικής διαδικασίας που μοντελοποιεί το εντελώς τυχαίο

3) Διαδικασία Poisson (Βασικοί υπολογισμοί, Υπέρθεση, διάσπαση Poisson, Γενικεύσεις)

4) Θεωρία Ουρών

5) Θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων

6) Πολιτικές Συντήρησης

② Πηγές

1) Eclass 2) rec.uoa.gr (αποθήκ.) / live.uoa.gr (ζωντανή μετάδοση)

3) Βιβλίο κ. Φακίνου "Στοχαστικά Μοντέλα στην ΕΕ" 4) Σημειώσεις για τα 2,3,4

5) Ώρες γραφείου: Δευτέρα, Πέμπτη 13.00-14.00

③ Δεσμευμένες Κατανομές

Έστω (X,Y) τ.μ.

- $\overset{(σ.π.)}{f_{X,Y}(x,y)} = P_r[X=x, Y=y]$ αν (X,Y) διακριτή

- $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \underbrace{F_{X,Y}(x,y)}_{P(X\leq x,\, Y\leq y)} = \lim\limits_{\substack{\delta x \to 0^+ \\ \delta y \to 0^+}} \dfrac{P_r[x < X \leq x+\delta x,\, y<Y\leq y+\delta y]}{\delta x \cdot \delta y}$

(σ.π.π.) δεν είναι απαραίτητο να είναι στο $[0,1]$ η πυκνότητα!

αν (X,Y) συνεχής.

- $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$: Δεσμευμένη σ.π. ή σ.π.π. της X δοθέντος ότι $Y=y$.

Για κάθε y, η $(f_{X|Y}(x|y))$ ως συνάρτηση του x είναι σ.π. ή σ.π.π. :

$f_{X|Y}(x|y) \geq 0$ και $\sum\limits_{x} f_{X|Y}(x|y) = 1$ (για διακριτή) ή $\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x|y)\,dx = 1$ (για συνεχή)

την κοιτάμε ως προς x

④ Δεσμευμένη Μέση Τιμή

1) Δεσμευμένη Μέση Τιμή ως προς τιμή τ.μ.

$$E[X|Y=y] = \begin{cases} \sum\limits_x x \cdot f_{X|Y}(x|y), & X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x|y)\,dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

περιορίζομαστε στην πληροφορία $Y=y$

Η $E[X|Y=y]$ είναι αριθμός που εξαρτάται από το y και τη συμβολίζουμε με $m_{X|Y}(y)$.

Διαισθητικά: Καλύτερη εκτίμηση της X υπό την πληροφορία $Y=y$.

(περιορίζουμε τον πληθυσμό: πχ αν $X=$ ύψος και $Y=$ βάρος, τότε $E[X|Y=80]=$ μέσο ύψος των ανθρώπων που είναι 80 kg. Βοηθάει πολύ στις αποφάσεις: δεσμεύομαι στις διάφορες ενέργειες και πληροφορίες)

2) Δεσμευμένη Μέση Τιμή ως προς τ.μ.

$E[X|Y] = \underbrace{m_{X|Y}(Y)}_{\text{συνάρτηση τ.μ., άρα τ.μ.}}$: συνάρτηση της Y, η καλύτερη συνάρτηση της Y που εκτιμά τη X (για κάθε y παίρνω την καλύτερη εκτίμηση της X και με βάση την πιθανοθεωρητική συμπεριφορά της Y, παίρνω την καλύτερη εκτίμηση της X συνολικά).

π.χ αν $m_{X|Y}(1) = 900$ με 40% και $m_{X|Y}(0) = 700$ με πιθ. 60%, φτιάχνω μία νέα τ.μ. με αυτή την κατανομή.

3] Δεσμευμένη Μέση Τιμή ως προς ενδεχόμενο

$$E[X|A] = \frac{E[X\cdot 1_A]}{Pr[A]}$$: αριθμός (γενίκευση του 1]), καλύτερη εκτίμηση της X δεδομένου ότι συνέβη το A.

A: ενδεχόμενο, $Pr[A] \neq 0$

Παρατήρηση: Για Y διακριτή τ.μ. και $A = \{Y=y\}$ η 3] ανάγεται στην 1]:

$$E[X|A] = E[X|Y=y] = \frac{E[X\cdot 1_{\{Y=y\}}]}{Pr[Y=y]} = \frac{\sum_x \sum_{y'} x\cdot 1_{\{Y=y\}} f_{X,Y}(x,y')}{f_Y(y)} =$$

$$= \frac{\sum_x x\cdot f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \sum_x x\cdot \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \sum_x x\cdot f_{X|Y}(x|y).$$

(Είναι σημαντικό να ξεχωρίσουμε διαισθητικά τις 1 και 2)

⑤ Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας (ΘΟΠ)

Θεώρημα Δεσμευσης Μέσης Τιμής (ΘΔΜΤ)

Θ.Ο.Π.: Αν $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$ διαμέριση του Ω $\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} B_i = \Omega,\ B_i \cap B_j = \phi, i\neq j\right)$, τότε $P(A) = \sum_{i=0}^{\infty} Pr[B_i]\, Pr[A|B_i]$

ΘΔΜΤ: Αν $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$ διαμέριση του Ω, τότε $E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} Pr[B_i]\, E[X|B_i]$

Proof $\sum_{i=0}^{\infty} Pr[B_i]\, E[X|B_i] = \sum_{i=0}^{\infty} \cancel{Pr[B_i]}\cdot \frac{E[X\cdot 1_{B_i}]}{\cancel{Pr[B_i]}} = \sum_{i=0}^{\infty} E[X\cdot 1_{B_i}] \overset{\text{Beppo-Levi}}{\underset{\text{(από Θ. Μέτρου)}}{=}}$

$E[X \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} 1_{B_i}}_{1 \text{ (αφού } B_i \text{ ξένα)}}] = E[X].$

⑥ Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής

Έστω Y τ.μ. και τα ενδεχόμενα $B_i = \{Y = y_i\}$. Τότε, από το προηγούμενο Θεώρημα,

$$E[X] = \begin{cases} \sum_y f_Y(y) \underbrace{E[X|Y=y]}_{m_{X|Y}(y)}, & \text{αν Y διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \overbrace{E[X|Y=y]}^{m_{X|Y}(y)}\, dy, & \text{αν Y συνεχής} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$E[X] = E[m_{X|Y}(Y)] = E[E[X|Y]]$$

(7) Παράδειγμα 1: Υπολογισμός Μέσης Τιμής Τυχαίου Αθροίσματος

Έστω $X_1, X_2, \ldots$ ανεξάρτητες, ισόνομες με $E[X_i] = \mu_X < \infty$, $Var[X_i] = \sigma_X^2 < \infty$,

N ακέραια τ.μ. ανεξάρτητη των X_i, $N \geq 0$, $E[N] = \mu_N < \infty$, $Var[N] = \sigma_N^2 < \infty$,

$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ (τυχαίο άθροισμα). $E[S_N] = ?$, $Var[S_N] = ?$

(Κλασική περίπτωση εφαρμογής του Θεωρήματος Διπλής Μέσης Τιμής (ΘΔΜΤ))

Από ΘΔΜΤ,

$$E[S_N] = E[\underbrace{E[S_N|N]}_{\text{τ.μ.}}].$$

Έχουμε: $\underbrace{E[S_N|N=n]}_{\text{αριθμός}} = E[\sum_{i=1}^{N} X_i \mid N=n] = E[\sum_{i=1}^{n} X_i \mid N=n] =$

$$= \sum_{i=1}^{n} E[X_i|N=n] \overset{N \text{ ανεξ. } X_i}{=\!=} \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = n \cdot E[X_i] = n \cdot \mu_X, \text{ άρα}$$

$E[S_N|N] = N \cdot \mu_X$, οπότε $E[S_N] = E[N\mu_X] = \mu_X E[N] = \mu_X \cdot \mu_N$

(= "μέσο πλήθος προσθετέων" x "μέση τιμή προσθετέων")

Εναλλακτικά,

$$E[S_N] = E[E[S_N|N]] = \sum_{n=0}^{\infty} P_r[N=n] \cdot \overbrace{E[S_N|N=n]}^{n \cdot \mu_X} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_r[N=n] \cdot n \cdot \mu_X = \mu_X \cdot \sum_{n=0}^{\infty} P_r[N=n] \cdot n = \mu_X \cdot E[N] = \mu_X \cdot \mu_N$$

(ο δεύτερος τρόπος με τα αθροίσματα δουλεύει πάντα, ο πρώτος όχι).

$Var[S_N] = E[S_N^2] - (E[S_N])^2$. Πρέπει να υπολογιστεί το $E[S_N^2]$.

Από ΘΔΜΤ, $E[S_N^2] = E[E[S_N^2|N]]$ κλπ.

⑧ Παράδειγμα 2: Αριθμός προϊόντων μέχρι 1η συντήρηση μηχανής

Μηχανή που παράγει προϊόντα, κάθε προϊόν είναι ελαττωματικό με πιθ. $p = 1‰ = \frac{1}{1000}$.
Η μηχανή συντηρείται όποτε εμφανίζονται δύο διαδοχικά ελαττωματικά.

X = # προϊόντων μέχρι την 1η συντήρηση. $E[X] = ?$

↑πλήθος

Λύση: E: ελαττωματικό, K: καλό.

1ο προϊόν
- K (με $1-p$) → $1+E[X]$ (ξαναρχίζει η διαδικασία)
- E (με p)
  - K → $2+E[X]$
  - E → 2 (2 ελαττ., άρα κάνω τη συντήρηση)

Έχουμε διαμέριση του Ω στα ενδεχόμενα $\{K\}, \{EK\}, \{EE\}$ (θα σκεφτόμαστε τον δειγματικό χώρο σαν τις διάφορες περιπτώσεις στις οποίες μπορεί να χωριστεί η πραγματικότητα).

άρα από ΘΔΜΤ: $E[X] = Pr[K]\cdot E[X|K] + Pr[EK]\cdot E[X|EK] + Pr[EE]\cdot E[X|EE] =$

$$= (1-p)\cdot(1+E[X]) + p(1-p)(2+E[X]) + p^2\cdot 2 \iff$$

$$E[X] = (1-p) + 2p(1-p) + 2p^2 + (1-p)E[X] + p(1-p)E[X] \iff$$

$$E[X] = \frac{(1-p)+2p(1-p)+2p^2}{1-(1-p)-p(1-p)} = \frac{1+p}{p^2} = \frac{1.001}{0.001^2} = 1001000$$

25/2/19 Μάθημα 2

Σ.μ.Ε.Ε.

Πιθανογεννήτριες

① Ορισμός

$X \geq 0$, ακέραια με σ.π. $f_X(k) = Pr[\underset{\text{διακριτή τ.μ.}}{X} = k]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Πιθανογεννήτρια της X: $P_X(z) \underset{\text{αναλυτικός ορισμός}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) z^k \underset{\text{πιθανοθεωρητικός ορισμός}}{=} E[z^X]$ [αντί για τις επιμέρους πιθανότητες, μελετάμε μία ολόκληρη δυναμοσειρά (γεννήτρια)]

② Ιδιότητες

1) $P_X(z)$ συγκλίνει στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ και $P_X(1) = 1$.

2) $f_X(k) = \dfrac{P_X^{(k)}(0)}{k!}$, $k = 0, 1, 2 \ldots$ [δεν είναι εύχρηστος τύπος, αλλά μας πείθει ότι η πιθανογεννήτρια έχει πράγματι όλη την πληροφορία για τις πιθανότητες $Pr[X=k]$]

άρα $P_X(z) = P_Y(z) \Leftrightarrow f_X(k) = f_Y(k)$ $\forall k = 0, 1, 2, \ldots$

3) $\underbrace{E[X(X-1)\cdots(X-r+1)]}_{\text{r-οστή (καθοδική) παραγοντική ροπή}} = P_X^{(r)}(1)$, $r = 1, 2 \ldots$

Proof $P_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) z^k \xRightarrow{d^r/dz^r} P_X^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-r+1) f_X(k) z^{k-r}$

$\Rightarrow P_X^{(r)}(1) = E[X(X-1)\cdots(X-r+1)]$.

4) Οι πιθανογεννήτριες είναι πολύ σημαντικές για μελέτη τυχαίων (και μη) αθροισμάτων τ.μ.

$$\left.\begin{array}{l} X_1, X_2, \ldots, X_n \text{ ανεξάρτητες}, X_i \geq 0, \text{ακέραιες} \\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \end{array}\right\} \Rightarrow P_{S_n}(z) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(z)$$

Proof (χρησιμοποιώντας τον πιθανοθεωρητικό ορισμό της πιθανογεννήτριας)

$P_{S_n}(z) \overset{\text{πιθαν. ορισμός}}{=} E[z^{S_n}] = E[z^{X_1 + \ldots + X_n}] = E[z^{X_1} \cdot z^{X_2} \cdot \ldots \cdot z^{X_n}]$ (1)

Αφού οι X_i είναι ανεξάρτητες, κάθε $f(X_i)$ είναι ανεξ., άρα z^{X_i} ανεξ., άρα

$$P_{S_n}(z) = E[z^{X_1}] \cdot \ldots \cdot E[z^{X_n}] = \prod_{i=1}^{n} P_X(z) \quad \lrcorner$$

5) $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων ακέραιων ≥ 0 τ.μ., $N \geq 0$ ακέραια, ανεξάρτητη των X_i, $S_N = \underbrace{\sum_{i=1}^{N \to \text{τ.μ.}} X_i}_{\text{τυχαίο άθροισμα}}$. Τότε,

$$P_{S_N}(z) = P_N(\underbrace{P_X(z)}_{\text{οποιασδήποτε από τις ισόνομες } X_i}).$$

Proof Σε τυχαία αθροίσματα είναι σύνηθες να δουλεύουμε με ΘΔΜΤ:

$$P_{S_N}(z) = E[z^{S_N}] \overset{\text{ΘΔΜΤ}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} Pr[N=n] \cdot E[z^{S_N} \mid N=n] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} Pr[N=n] \cdot E[z^{S_n} \mid N=n] \overset{N \text{ ανεξ. } X_i}{=\!=\!=} \sum_{n=0}^{\infty} Pr[N=n] \cdot \underbrace{E[z^{S_n}]}_{\text{"πετάμε" την πληροφορία } N=n \text{ λόγω ανεξαρτησίας } N, X_i} =$$

$$\underset{\text{για ισόνομες}}{\overset{(4)}{=}} \sum_{n=0}^{\infty} Pr[N=n] \cdot (P_X(z))^n = P_N(P_X(z)) \quad \lrcorner$$

Ειδικότερα, το 3) δίνει:

$$E[X] = P_X'(1) \text{ και } Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 =$$

$$= E[X(X-1)] + E[X] - (E[X])^2 = P_X''(1) + P_X'(1) - (P_X'(1))^2.$$

Θα δούμε τώρα πιθανογεννήτριες γνωστών κατανομών και πώς από μία πιθανογεννήτρια μπορούμε να βρούμε είτε τις $f_X(k)$ είτε ένα αναδρομικό σχήμα για αυτές.

③ Βασικές σειρές

1) $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \dfrac{1}{1-z}$, $|z|<1$ (γεωμετρική)

2] $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$ (εκθετική)

3] $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k = (1+z)^n$ (διωνυμική) ← μπορεί να πάει και έως ∞

4] $\sum_{k=0\,/\,n}^{\infty} \binom{k}{n} z^k = \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}}, |z|<1$ (αρνητική διωνυμική σειρά)

η μεταβλητή της άθροισης είναι πάνω τώρα

<u>Proof</u> Παραγωγίζουμε n φορές τη γεωμετρική σειρά:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \overset{d^n/dz^n}{\Longrightarrow} \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)\cdot z^{k-n} = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot (1-z)^{-(n+1)}$$

$$\overset{\cdot z^n}{\Longrightarrow} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} z^k = \frac{n!\, z^n}{(1-z)^{n+1}} \overset{\div n!}{\Longrightarrow} \sum_{k=n}^{\infty} \underbrace{\frac{k!}{n!(k-n)!}}_{\binom{k}{n}} z^k = \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}}.$$

④ Πιθανογεννήτριες βασικών διακριτών κατανομών

1] Γεωμετρική Geom(p).

X = # επιτυχιών μέχρι την 1η αποτυχία σε ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p.

[υπάρχουν πολλές μορφές Geom: #αποτ. ως την 1η επιτ., #επιτ. ως την 1η αποτ., #δοκιμών ως την 1η επιτ./αποτ.]

$$Pr[X=k] = (1-p)\cdot p^k, \quad k=0,1,2,\dots$$

$$P_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)p^k\cdot z^k = (1-p)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(pz)^k \underset{\text{σειρά}}{\overset{\text{γεωμετρική}}{=}} \frac{1-p}{1-pz}, \quad |pz|<1$$

2] Poisson(λ) (τη σκεφτόμαστε ως Bin(n,p) με πολύ μεγάλο n, πολύ μικρό p τ.ω. $n\cdot p=\lambda$)

$$Pr[X=k] = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k=0,1,\dots$$

$$P_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot z^k = e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda z)^k}{k!} \underset{\text{σειρά}}{\overset{\text{εκθετική}}{=}} e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda z} = e^{-\lambda(1-z)}$$

(συγκλίνει παντού).

3) Αρνητική Διωνυμική NegBin(n,p)

X = # επιτυχιών μέχρι την n-οστή αποτυχία σε ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p.

$\underbrace{|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|\,|}_{k \text{ επιτυχίες},\ n-1 \text{ αποτυχίες}}\,A|$

Άρα, $\Pr[X=k] = \binom{k+n-1}{\underbrace{n-1}_{\acute{\eta}\ k}} \cdot p^k \cdot (1-p)^n$, $k=0,1,2,\dots$

$$P_X(z) = \left(\frac{1-p}{1-pz}\right)^n$$

, λόγω της ιδιότητας 4 και πιθανογεννήτριας γεωμετρικής [Βλέπουμε την NegBin ως άθροισμα n ανεξάρτητων Geom]

ή, αναλυτικά με τον ορισμό,

$$P_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\overbrace{k+n-1}^{\ell}}{n-1} p^k (1-p)^n \cdot z^k \overset{\ell := k+n-1}{\underset{k\ge 0,\ \ell \ge n-1}{=}}$$

$$\sum_{\ell=n-1}^{\infty} \binom{\ell}{n-1} p^{\ell-n+1} (1-p)^n \cdot z^{\ell-n+1} = (pz)^{-(n-1)} \sum_{\ell=n-1}^{\infty} \binom{\ell}{n-1} (pz)^\ell (1-p)^n =$$

$$(1-p)^n (pz)^{-(n-1)} \cdot \sum_{\ell=n-1}^{\infty} \binom{\ell}{n-1} (pz)^\ell \overset{\text{αρν. διων.}}{\underset{\text{σειρά}}{=}} \frac{(pz)^{n-1}}{(1-pz)^n} \cdot (1-p)^n \cdot (pz)^{-(n-1)} \Rightarrow$$

$$P_X(z) = \left(\frac{1-p}{1-pz}\right)^n.$$

4) Διωνυμική Bin(n,p)

X = # επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p (ανά δοκιμή)

$\Pr[X=k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k=0,1,\dots,n$

Πιθανογεννήτρια δοκιμής Bernoulli (δείκτρια) $= (1-p)\cdot z^0 + p z^1 = 1-p+pz$, άρα, από ιδιότητα 4,

$$P_X(z) = (1-p+pz)^n.$$

Εναλλακτικά,

$$P_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot z^k = (1-p)^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{pz}{1-p}\right)^k \overset{\text{διωνυμική}}{\underset{\text{σειρά}}{=}}$$

$$= (1-p)^n \cdot \left(1 + \frac{pz}{1-p}\right)^n = (1-p+pz)^n.$$

[Μέχρι στιγμής: 2 ορισμοί, 5 ιδιότητες, 4 βασικές σειρές. Συνδυάζουμε όλα αυτά για να βρούμε ό,τι θέλουμε!]

⑤ Αντιστροφή Πιθανογεννητριών ("πώς από την πιθανογεννήτρια βρίσκουμε την κατανομή")

$$P_X(z) \longrightarrow \underbrace{Pr[X=k]}$$

ακριβής τύπος ή αναδρομικό σχήμα

Βασικές μορφές για την $P_X(z)$:

$$P_X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \leftarrow \text{πολυώνυμα}, \quad P_X(z) = e^{\frac{N(z)}{D(z)}} \leftarrow \text{πολυώνυμα}$$

⑥ Αντιστροφή Ρητών Πιθανογεννητριών

1) $P(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ (nominator $N(z)$, denominator $D(z)$). (οι άγνωστες ποσότητες θα βρίσκονται στον αριθμητή $N(z)$)

Για ακριβή τύπο:

1º βήμα: Παραγοντοποίηση του $D(z)$

2º βήμα: Αν $N(z)$ έχει άγνωστη παράμετρο, χρησιμοποιούμε ότι $P_X(1)=1$ (εξίσωση κανονικοποίησης $(\sum p_n = 1)$) και ότι η $P_X(z)$ συγκλίνει στο $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ [άρα κάθε ρίζα του $D(z)$ με $|z| \leq 1$ πρέπει να είναι και ρίζα του $N(z)$, για να είναι επουσιώδης η ανωμαλία]

3º βήμα: Ανάλυση σε απλά κλάσματα.

4º βήμα: Χρησιμοποίηση γεωμετρικής και αρνητικής διωνυμικής σειράς.

Παράδειγμα 1: $P_X(z) = \frac{az+b}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}$, $Pr[X=k] = ?$ (άγνωστες παράμετροι a, b)

1º βήμα: $z^2 - \frac{5}{2}z + 1 = (z-2)(z-\frac{1}{2})$

2º βήμα: $P_X(1) = 1 \Rightarrow -2(a+b) = 1$

$|\frac{1}{2}| \leq 1$ ρίζα του $D(z) \Rightarrow \frac{1}{2}$ ρίζα του $N(z) \Rightarrow a \cdot \frac{1}{2} + b = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

άρα $P_X(z) = \dfrac{-z+\frac{1}{2}}{(2-z)(\frac{1}{2}-z)}$

3º βήμα: $P_X(z) = \dfrac{1}{2-z}$ (εδώ έτυχε να απλοποιείται. Διαφορετικά,

$P_X(z) = \dfrac{A}{2-z} + \dfrac{B}{\frac{1}{2}-z}$ κλπ)

4º βήμα: $P_X(z) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{z}{2}} = \dfrac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\dfrac{z}{2}\right)^k \Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{\infty} Pr[X=k] \cdot z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \cdot z^k \Rightarrow Pr[X=k] = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}, \; k=0,1,\ldots$$

Παράδειγμα 2: $P_X(z) = \dfrac{c-15z}{54-63z+18z^2}$, $Pr[X=k]=?$

1º βήμα: $D(z) = 54-63z+18z^2 = 18\underbrace{(2-z)\left(\frac{3}{2}-z\right)}$

οι ρίζες $2, \frac{3}{2}$ είναι εκτός του $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$, άρα δε δίνουν πληροφορία για το c του $N(z)$

2º βήμα: $P_X(1) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{c-15}{9} = 1 \Leftrightarrow c = 24$

3º βήμα: $\dfrac{24-15z}{18(2-z)\left(\frac{3}{2}-z\right)} = \dfrac{A}{2-z} + \dfrac{B}{\frac{3}{2}-z} \Leftrightarrow \dfrac{24-15z}{18\left(\frac{3}{2}-z\right)} = A + \dfrac{B}{\frac{3}{2}-z} \cdot (2-z) \overset{z=2}{\Rightarrow}$

$A = \dfrac{24-15 \cdot 2}{18 \cdot \left(\frac{3}{2}-2\right)} = \dfrac{-6}{-9} = \dfrac{2}{3}$.

Επίσης, $\dfrac{24-15z}{18 \cdot (2-z)} = \dfrac{A}{2-z} \cdot \left(\dfrac{3}{2}-z\right) + B \overset{z=\frac{3}{2}}{\Rightarrow} B = \dfrac{24-15 \cdot \frac{3}{2}}{18 \cdot \left(2-\frac{3}{2}\right)} = \dfrac{1}{6}$

4º βήμα: $P_X(z) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2-z} + \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{\frac{3}{2}-z} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{z}{2}} + \dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{2z}{3}} \Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{\infty} Pr[X=k] \cdot z^k = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k + \frac{1}{9} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2z}{3}\right)^k \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} Pr[X=k] \cdot z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k\right] \cdot z^k \Rightarrow$$

$$Pr[X=k] = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k, \; k=0,1,2,\ldots$$

2) Για αναδρομικό σχήμα:

$$P(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \Rightarrow D(z)P(z) = N(z).$$

Εξισώνω συντελεστές του z^k.

π.χ. στο Παραδ.2: $(54-63z+18z^2)\cdot P_X(z) = 24-15z \Rightarrow$

$$(54-63z+18z^2)\cdot \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k)\cdot z^k = 24-15z.$$

Για $k=0$, $54\cdot f_X(0) = 24 \Rightarrow f_X(0) = \frac{24}{54}$.

Για $k=1$, $54\cdot f_X(1) - 63\cdot f_X(0) = -15 \Rightarrow f_X(1) = \dfrac{-15+63\cdot\frac{24}{54}}{54}$

Για $k \geq 2$, $54 f_X(k) - 63 f_X(k-1) + 18 f_X(k-2) = \overset{\text{ο συντελεστής του } z^k \text{ στο RHS (δεξί μέλος)}}{0} \Rightarrow$

$$f_X(k) = \frac{63\cdot f_X(k-1) - 18 f_X(k-2)}{54}, \ k \geq 2 \text{ (αναδρομικό σχήμα)}$$