28/2/19 Μάθημα 3

Σ.μ.Ε.Ε.

Πιθανογεννήτριες
Μετασχηματισμοί Laplace-Stieltjes

① Πιθανογεννήτριες (υπενθύμιση) (μόνο για ακέραιες τ.μ.!)

- $X \geq 0$, ακέραια $\rightarrow P_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Pr[X=n] \cdot z^n = E[z^X]$

- Ιδιότητες
- 4 βασικές σειρές
- Πιθανογεννήτριες βασικών διακριτών τ.μ.
- Αντιστροφή πιθανογεννήτριας: πώς από την $P_X(z)$ βρίσκουμε τις $Pr[X=n]$ (έχουμε πει ότι η πιθανογεννήτρια περιέχει όλη την πληροφορία για την κατανομή· αυτό δε σημαίνει ότι πάντα μπορούμε να βρίσκουμε τις $Pr[X=n]$, ενδέχεται να έχουμε ένα αναδρομικό σχήμα ως μέσο μελέτης της κατανομής)

Αν η $P_X(z)$ είναι ρητή, μπορούμε πάντα να βρούμε τις $Pr[X=n]$ (ακριβή τύπο ή αναδρομικό σχήμα).

Αν $P_X(z) = e^{D(z)}$, όπου $D(z)$ πολυώνυμο ή ρητή συνάρτηση, μπορούμε πάντα να βρούμε αναδρομικό σχήμα.

② Παράδειγμα αντιστροφής πιθανογεννήτριας εκθετικής μορφής (θυμίζουμε ότι $P_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$, άρα $P_X'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n z^{n-1}$)

Γενική ιδέα: $\log \rightarrow d/dz$. Έστω $P_X(z) = e^{D(z)}$. Τότε,

$$\log P_X(z) = D(z) \Rightarrow \frac{P_X'(z)}{P_X(z)} = D'(z) \Rightarrow P_X'(z) = P_X(z) \cdot D'(z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot p_n \cdot z^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \cdot \sum_{j=1}^{\infty} j\, d_j z^{j-1} \quad \overset{\cdot z}{\Longrightarrow}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot p_n \cdot z^n = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \cdot \sum_{j=1}^{\infty} j\, d_j z^j}_{(p_0+p_1 z+p_2 z^2+\dots)(1 d_1 z+2 d_2 z^2+\dots)}$$

. Εξισώνουμε τους συντελεστές, προσέχοντας να συμφωνούν οι εκθέτες του z:

$$n\cdot p_n = \underbrace{p_0\cdot n}_{n+0=n}\cdot d_n + \underbrace{p_1\cdot (n-1)}_{(n-1)+1=n}\cdot d_{n-1} + \dots + \underbrace{p_{n-1}\cdot 1}_{(n-1)+1=n}\cdot d_1 \Rightarrow \underbrace{p_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} p_i (n-i) d_{n-i}}_{\text{δηλαδή για να βρω μία } p_n \text{ χρειάζομαι όλες τις προηγούμενες (αναδρομή)}},$$

$n \geq 1$. Επίσης, $p_0 = P_X(0) = e^{D(0)} = e^{d_0}$, οπότε βρίσκουμε τα $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω ότι έχουμε την πιθανογεννήτρια $P(z) = e^{-\lambda\left(1-\frac{z}{3}-\frac{2z^2}{3}\right)}$ και θέλουμε να βρούμε τις p_n. Υπολογίζουμε:

$$\log P(z) = -\lambda\left(1-\frac{z}{3}-\frac{2z^2}{3}\right) \underset{d/dz}{\Longrightarrow} \frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{\lambda}{3} + \frac{4\lambda z}{3} \Rightarrow$$

$$P'(z) = \left(\frac{\lambda}{3}+\frac{4\lambda}{3}z\right)\cdot P(z) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot p_n \cdot z^{n-1} = \left(\frac{\lambda}{3}+\frac{4\lambda}{3}z\right)\cdot \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \overset{\cdot z}{\Longrightarrow}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p_n z^n = \left(\frac{\lambda}{3}z + \frac{4\lambda}{3}z^2\right)\cdot \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \Rightarrow n\cdot p_n = \frac{\lambda}{3}p_{n-1} + \frac{4\lambda}{3}p_{n-2},$$ για

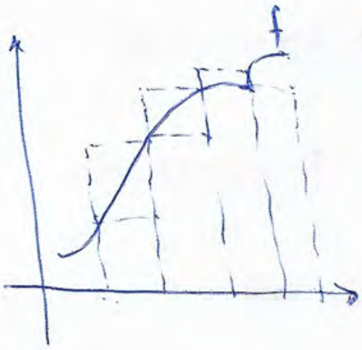
$n \geq 2$, και $p_1 = \frac{\lambda}{3}p_0$, όπου το p_0 το βρίσκουμε από τη σχέση $p_0 = P(0) = e^{-\lambda}$, και η αναδρομή είναι πλήρης.

[<u>Τι πρέπει να θυμόμαστε από πιθανογεννήτριες:</u> 2 ορισμοί (αναλυτικός, πιθανοθεωρητικός), 5 ιδιότητες, 4 σειρές, βασικές διακριτές τ.μ. (πιθανογ.) και αντιστροφή]

Οι πιθανογεννήτριες ήταν μόνο για ακέραιες τ.μ. Θα δούμε τώρα ένα εργαλείο που δουλεύει και για <u>συνεχείς</u> τ.μ., τους μετασχηματισμούς Riemann-Stieltjes.

3) <u>Ολοκληρώματα Riemann-Stieltjes</u> (γενίκευση του ολοκληρώματος Riemann)

Έστω f φραγμένη, φ αύξουσα, $[a,b]$ διάστημα, $P=\{a=t_0<t_1<\dots<t_n=b\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$. Προσεγγίζουμε με άνω και κάτω αθροίσματα.



Το R-ολοκλήρωμα (Riemann) της f υπάρχει, και συμβολίζεται $\int_a^b f(x)dx$, αν και μόνο αν

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \overset{*}{=} \overline{\int_a^b} f(x)dx \text{ , όπου}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \underbrace{\sup_P \left\{ \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)\,(t_i-t_{i-1}) \right\}}_{\text{το supremum των κάτω αθροισμάτων (δηλαδή η βέλτιστη από κάτω προσέγγιση)}}$$

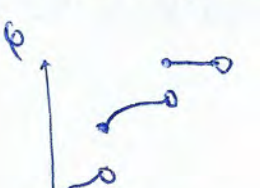
και

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \overbrace{\inf_P \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)\,(t_i-t_{i-1}) \right\}}^{\text{το infimum των άνω αθροισμάτων (δηλαδή η βέλτιστη από πάνω προσέγγιση)}}$$

* Ζητάμε, η βέλτιστη από κάτω προσέγγιση να "συμφωνεί" με τη βέλτιστη από πάνω προσέγγιση

Το ολοκλήρωμα R-S (Riemann-Stieltjes) συμβολίζεται με $\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$ και ορίζεται όπως το ολοκλήρωμα R, αλλά αντί για $t_i - t_{i-1}$ έχουμε $\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})$. [γενικεύει το ολοκλ. R, δίνοντας "βάρος" σε ορισμένα σημεία της f, κάτι που χρησιμεύει πολύ στις πιθανότητες]

<u>Θεώρημα</u> Αν η φ είναι κατά τμήματα συνεχής και παραγωγίσιμη μεταξύ των σημείων ασυνέχειας, και f συνεχής, τότε



$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,d\varphi(x)}_{\text{ολοκλήρωμα Riemann Stieltjes}} = \underbrace{\sum_{\substack{x\in[a,b]\\ \varphi \text{ ασυνεχής στο } x}} f(x)\cdot\left(\varphi(x)-\varphi(x^-)\right)}_{\text{το συνολικό "άλμα" που κάνει η φ}} + \underbrace{\int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx}_{\text{το γνωστό ολοκλήρωμα Riemann}}$$

[Παρατηρούμε ότι για $\varphi(x)=x$ το ολοκλήρωμα R-S ταυτίζεται με το R, άρα το R-S αποτελεί πράγματι γενίκευση του R]

④ <u>Μέση τιμή ως ολοκλήρωμα R-S</u>

Αν X διακριτή με σ.π. $f(x)=Pr[X=x]$ ή συνεχής με σ.π.π. $f(x)=\frac{dF_X(x)}{dx}$ ή μεικτή με σ.κ. $F_X(x)=Pr[X\le x]$, και $g(x)$ συνεχής, τότε

$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dF_X(x)$ [Παράδειγμα: (1) Αν X διακριτή, τότε

$E[g(X)] = \sum g(x)\,(F_X(x) - F_X(x^-)) = R\text{-}S$ (2) Αν X συνεχής, τότε

$E[g(X)] = \int g(x)\, F_X'(x)\,dx = R\text{-}S$ (3) Αν X μεικτή, τότε

$E[g(X)] = \sum_{x_i \text{ ασυνεχής}} g(x)\,(F_X(x) - F_X(x^-)) + \int g(x)\, F_X'(x)\,dx = R\text{-}S$], δηλαδή

με το ολοκλήρωμα R-S ενοποιούμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις.

⑤ Βασικά σημεία για R-S

- $\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) = \sum_{\substack{x \text{ σημείο} \\ \text{ασυνέχειας} \\ \text{της } \varphi \text{ στο } [a,b]}} f(x)\cdot(\varphi(x) - \varphi(x^-)) + \int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx$

- $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dF_X(x)$, όπου F_X η συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) της X.

⑥ Μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes (L-S) συνάρτησης

Μετασχηματισμός L-S της $\varphi(x)$ στο $[0,\infty)$ $= \tilde{\varphi}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\, d\varphi(x)$

Παρατήρηση: Αν η φ είναι παραγωγίσιμη, τότε ο μετασχηματισμός L-S ισούται με τον μετασχηματισμό Laplace της φ':

$$\int_0^{\infty} e^{-sx}\, d\varphi(x) \overset{\varphi \text{ παραγ/μη}}{=\!=} \int_0^{\infty} e^{-sx}\cdot\varphi'(x)\,dx = \mathcal{L}_{\{\varphi'\}}(s).$$

⑦ Μετασχηματισμός L-S τυχαίας μεταβλητής

Έστω $X \geq 0$ τ.μ. (διακριτή / συνεχής / μεικτή) με σ.κ. $F_X(x)$.

Ο μετασχηματισμός L-S της X ορίζεται ως $\tilde{F}_X(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}\, dF_X(x)$.

Παρατηρούμε ότι $\tilde{F}_X(s) = E[e^{-sX}]$ [όπως και στις πιθανογεννήτριες, έτσι κι εδώ έχουμε έναν αναλυτικό και έναν πιθανοθεωρητικό ορισμό]

⑧ Σχέση μετασχηματισμού L-S τ.μ. X με άλλα στοιχεία της X

Έστω $X \geq 0$ τ.μ. με σ.κ. $F_X(x)$ και μετασχηματισμό L-S. $\tilde{F}_X(s)$.

Τότε,

Moments function

1] $\tilde{F}_X(-s) = E[e^{sX}] = M_X(s) \rightsquigarrow$ ροπογεννήτρια της X

2] X συνεχής $\Rightarrow \tilde{F}_X(s) = \underbrace{\int_0^\infty e^{-sx} f_X(x)\,dx}_{\text{Το ολοκλήρωμα R-S έγινε ολοκλ. Riemann (αφού X συνεχής)}} \rightsquigarrow$ μετασχηματισμός Laplace της σ.π.π. f_X.

3] X διακριτή (οπότε 2 εργαλεία: πιθανογεννήτρια και μετασχ. L-S) $\Rightarrow \tilde{F}_X(s) = E[e^{-sX}] = P_X(e^{-s}) \rightarrow$ πιθανογεννήτρια της X στο e^{-s}

⑨ Ιδιότητες του μετασχηματισμού L-S (να συγκριθούν με τις αντίστοιχες της πιθανογεννήτριας)

1] $\tilde{F}_X(0) = 1$ (κατ' αναλογία με τις πιθανογεννήτριες: εκεί θέλαμε $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, άρα $P_X(1) = 1$, εδώ $\int_0^\infty f_X(x)dx = 0$, άρα $\tilde{F}_X(0) = 1$)

$\tilde{F}_X(s)$ συγκλίνει στο $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) \geq 0\}$ (πάλι βλέπουμε το s ως μιγαδικό, γιατί το $\mathbb{C}$ έχει δομή που μας δίνει πολύ σημαντικά θεωρήματα)

2] $\tilde{F}_X(s) = \tilde{F}_Y(s) \Leftrightarrow X, Y$ ισόνομες (δηλαδή ο μετασχηματισμός L-S χαρακτηρίζει μία κατανομή)

3] $E[X^r] = (-1)^r \cdot \tilde{F}_X^{(r)}(0)$

Proof $E[e^{-sX}] = \tilde{F}_X(s) \xrightarrow[\text{(το s είναι η μεταβλητή)}]{d^r/ds^r} E[(-X)^r \cdot e^{-sX}] = \tilde{F}_X^{(r)}(s) \overset{s=0}{\Rightarrow}$

$E[X^r] \cdot (-1)^r = \tilde{F}_X^{(r)}(0) \Rightarrow E[X^r] = (-1)^r \cdot \tilde{F}_X^{(r)}(0)$.

4] $\left.\begin{array}{l} X_1, \ldots, X_n \text{ ανεξάρτητες τ.μ.} \\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{F}_{S_n}(s) = \prod_{i=1}^{n} \tilde{F}_{X_i}(s)$

Proof $\tilde{F}_{S_n}(s) = E[e^{-s \cdot S_n}] = E[e^{-s(X_1 + \cdots + X_n)}] =$

$= E[e^{-sX_1} \cdots e^{-sX_n}] \overset{X_i \text{ ανεξ.}}{=\!=} E[e^{-sX_1}] \cdots E[e^{-sX_n}] = \tilde{F}_{X_1}(s) \cdots \tilde{F}_{X_n}(s)$.

5] $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητες και ισόνομες

$N \geq 0$ ακέραια (παίζει τον ρόλο του πλήθους στοιχείων σε ένα τυχαίο άθροισμα)

ανεξάρτητη των X_i,

$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ (τυχαίο άθροισμα)

$$\Rightarrow \tilde{F}_{S_N}(s) = P_N(\tilde{F}_X(s))$$

Προσοχή (με πιθανογεννήτρια)!

Proof $\tilde{F}_{S_N}(s) = E[e^{-s \cdot S_N}] \overset{\text{Θ.Δ.Μ.Τ.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} Pr[N=n] \cdot E[e^{-s S_N} \mid N=n] =$

$\overset{\text{Ξέροντας την πληροφορία } N=n}{=} \sum_{n=0}^{\infty} Pr[N=n] \cdot E[e^{-s \cdot S_n} \mid N=n] \overset{N \text{ ανεξ. } X_i}{=} \sum_{n=0}^{\infty} Pr[N=n] \cdot E[e^{-s \cdot S_n}] =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} Pr[N=n] \cdot (\tilde{F}_X(s))^n \overset{P_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_r[N=n] \cdot z^n}{=} P_N(\tilde{F}_X(s))$. ⌋

[Συχνά, ο τρόπος που δουλεύουμε είναι: βρίσκουμε πρώτα τον μετασχημ. L-S, γιατί είναι ευκολότερο, και μετά προσπαθούμε να πάρουμε στοιχεία για την κατανομή. Άρα χρειαζόμαστε πάλι τεχνικές αντιστροφής!]

10) Ζεύγη συναρτήσεων και μετασχηματισμών L-S

X	$\varphi(x)$	$\tilde{\varphi}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} d\varphi(x)$
–	$x, x \geq 0$	$\frac{1}{s}$
$X=0$ με πιθ. 1	$F_X(x)=1, x \geq 0$	1 — άρα από τον ορισμό του ολ. R-S έχουμε την τιμή 1 στο άλμα
$X \sim Exp(\lambda)$	$F_X(x) = 1-e^{-\lambda x}, x \geq 0$	$\frac{\lambda}{\lambda+s}$ ($M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda-t} \Rightarrow \tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$)
$X \sim$ Erlang(n,λ) " Gamma(n,λ)	$F_X(x) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$
$Z=X+Y$, X,Y ανεξ.	$F_Z(z) = \int_0^{\infty} F_Y(z-x) dF_X(x)$	$\tilde{F}_Z(s) = \tilde{F}_X(s) \cdot \tilde{F}_Y(s)$
$Z = \begin{cases} X, & \text{με πιθ. } p \\ Y, & \text{με πιθ. } 1-p \end{cases}$	$F_Z(z) = p \cdot F_X(z) + (1-p) \cdot F_Y(z)$	$\tilde{F}_Z(s) = p \cdot \tilde{F}_X(s) + (1-p) \cdot \tilde{F}_Y(s)$