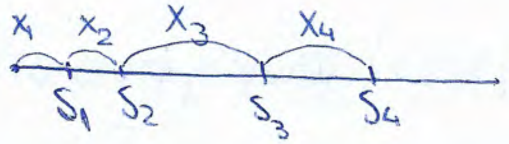
7/3/19 Μάθημα 5

Σ.μ.ε.ε.

Ανανεωτική Θεωρία (Μελετάει συστήματα που αναγεννώνται ανά κάποιες χρονικές στιγμές ⇝ στοχαστική περιοδικότητα, π.χ. στις ουρές, μόλις ένας πελάτης βρει το σύστημα κενό, είναι σαν να αρχίζουν όλα από την αρχή, άρα αρκεί να μελετήσουμε έναν κύκλο λειτουργίας του συστήματος)

① Σημειακή Διαδικασία (ή Ανέλιξη) [Ανέλιξη ονομάζουμε μία οικογένεια τυχαίων μτβ, $\{X_i : i \in I\}$]



$0 \le S_1 \le S_2 \le \dots$ ⟵ Σημειακή Διαδικασία

S_n: χρόνος του n-οστού γεγονότος

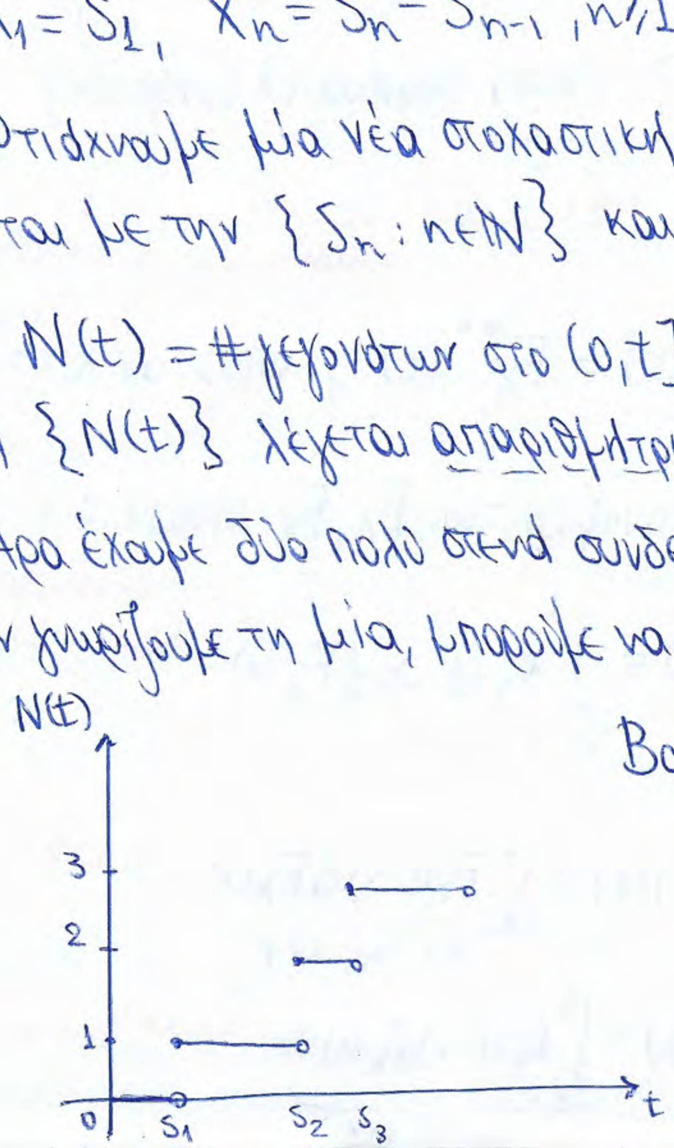
$X_1 = S_1$, $X_n = S_n - S_{n-1}$, $n \geq 1$, X_n: n-οστός ενδιάμεσος χρόνος.

Φτιάχνουμε μία νέα στοχαστική διαδικασία, έστω $\{N(t)\}$, που συνδέεται με την $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ και ορίζεται ως εξής:

$$N(t) = \#\text{γεγονότων στο } (0,t] = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}, \; t \geq 0 .$$

Η $\{N(t)\}$ λέγεται απαριθμήτρια σημειακή διαδικασία.

Άρα έχουμε δύο πολύ στενά συνδεδεμένες στοχαστικές διαδικασίες και αν γνωρίζουμε τη μία, μπορούμε να βρούμε την άλλη. Σχηματικά,



Βασική σχέση-"γέφυρα" μεταξύ $\{S_n\}$, $\{N(t)\}$

$$\boxed{\{S_n \leq t\} = \{N(t) \geq n\}}$$

(πολύ σημαντική σχέση: μας επιτρέπει να υπολογίζουμε πιθανότητες!) (1)

[Διαισθητικά: $\{S_n \le t\}$ = "το n-οστό γεγονός έγινε πριν τη στιγμή t" =
= "τη στιγμή t έχουν γίνει τουλάχιστον n γεγονότα" = $\{N(t) \geq n\}$]

[Η σ.δ. $\{S_n\}$ είναι διακριτού χρόνου και συνεχούς χ.κ. (χώρος καταστάσεων),
Η σ.δ. $\{N(t)\}$ είναι συνεχούς χρόνου και διακριτού χ.κ.]
σ.δ. = στοχαστική διαδικασία

Θα μελετήσουμε μία συγκεκριμένη κατηγορία: ανανεωτικές διαδικασίες, όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι πλέον είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ.

② Ανανεωτική Διαδικασία

$\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία $\overset{\text{ορισμός}}{\Longleftrightarrow}$ $\{N(t)\}$ απαριθμήτρια σημειακή διαδικασία με ανεξάρτητους και ισόνομους ενδιάμεσους χρόνους $\sim F_X(x)$ $(X \geq 0)$.

$$F_{S_n}(t) = Pr[S_n \le t] = ? \quad , \quad P_n(t) = Pr[N(t)=n] = ? \, ,$$

$$m(t) = E[N(t)] = ? \quad (m(t)\text{: Ανανεωτική συνάρτηση})$$

③ Βασικοί υπολογισμοί

$Pr[S_k \le t] = Pr[X_1 + \ldots + X_k \le t]$, άρα σ.κ. αθροίσματος τ.μ., οπότε θέλουμε συνέλιξη (k-οστής τάξης)

1) $$F_{S_k}(t) \overset{\text{διαισθητικά, θέλουμε την συνέλιξη}}{=} (\underbrace{F_X * F_X * \ldots * F_X}_{k\text{-φορές}})(t) = F_X^{*k}(t) \, ,$$ όπου αν X, Y ανεξάρτ. τ.μ.

με σ.κ. F_X, F_Y, η συνέλιξη κατανομών των F_X, F_Y είναι η σ.κ. της τ.μ. $X+Y$, δηλαδή
$$(F_X * F_Y)(t) = \int_0^t \underbrace{F_Y(t-x)}_{\substack{\text{θέλουμε } x+y \le t \\ \Leftrightarrow y \le t-x}} dF_X(x)$$ ← ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes

Παρατήρηση (Προσοχή!):

- Συνέλιξη κατανομών: $(F_X * F_Y)(t) = \underbrace{\int_0^t F_Y(t-x)\, dF_X(x)}_{\text{σ.κ. της } X+Y}$ (ολοκλ. R-S)
- Συνέλιξη πυκνοτήτων: $(f_X * f_Y)(t) = \underbrace{\int_0^t f_Y(t-x) f_X(x)\, dx}_{\text{σ.π.π. της } X+Y}$ (ολοκλ. Riemann!)

2] $P_k(t) = \begin{cases} 1 - F_X(t), & k=0 \\ F_X^{*k}(t) - F_X^{*(k+1)}(t), & k \geq 1 \end{cases}$ (αν ορίσουμε $F_X^{*0} = 1$, οι δύο τύποι ενωποιούνται)

3] $m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_X^{*k}(t)$

Αποδείξεις 1] $F_{S_k}(t) = \Pr[S_k \leq t] = \Pr\left[\sum_{i=1}^{k} X_i \leq t\right]$, όπου οι X_i είναι ανεξάρτητες και $X_i \sim F_X(x)$, οπότε $\Pr\left[\sum_{i=1}^{k} X_i \leq t\right] =$

$$= (F_{X_1} * F_{X_2} * \dots * F_{X_k})(t) \overset{X_i \text{ ισόνομες}}{=\!=\!=} F_X^{*k}(t)$$ (όπου X μία από τις X_i).

2] $P_k(t) = \Pr[N(t) = k] \underset{\text{γέφυρα}}{\overset{\text{σχέση}}{=\!=}} \Pr[S_k \leq t < S_{k+1}]$. Σε επίπεδο ενδεχομένων, έχουμε $\{S_k \leq t < S_{k+1}\} = \{S_k \leq t\} \cap \{S_{k+1} > t\} =$

$= \{S_k \leq t\} \cap \{S_{k+1} \leq t\}^c$ και $\{S_{k+1} \leq t\} \subseteq \{S_k \leq t\}$,

άρα $\{S_k \leq t < S_{k+1}\} = \{S_k \leq t\} \setminus \{S_{k+1} \leq t\}$ και, επιπλέον,

$$\Pr[S_k \leq t < S_{k+1}] = \Pr[S_k \leq t] - \Pr[S_{k+1} \leq t] =$$

$$F_{S_k}(t) - F_{S_{k+1}}(t) = F_X^{*k}(t) - F_X^{*(k+1)}(t), \quad k \geq 1.$$

Για $k=0$, $P_0(t) = \Pr[\underbrace{N(t)=0}_{\text{τη στιγμή } t \text{ έχουν συμβεί 0 γεγονότα}}] = \Pr[\underbrace{S_1 > t}_{\text{το } 1^\text{ο} \text{ γεγονός έγινε μετά τη στιγμή } t}] =$

$= 1 - \Pr[S_1 \leq t] = 1 - F_X(t)$.

3] $\underbrace{m(t)}_{\text{μέσο \# ανανεώσεων μέχρι τη στιγμή } t} = E[N(t)] = E\Big[\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{S_k \leq t\}}}_{\text{προσθέτουμε τόσα 1 όσα και τα γεγονότα που έχουν γίνει}}\Big] \underset{(\text{Θ. Μέτρου})}{\overset{\text{Beppo-Levi}}{=\!=\!=}} \sum_{k=1}^{\infty} E[1_{\{S_k \leq t\}}] =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[S_k \leq t] = \sum_{k=1}^{\infty} F_X^{*k}(t).$$

(Βρήκαμε μεν "απλούς" τύπους, ωστόσο υπολογιστικά είναι ασύμφορη η συνέλιξη k-οστής τάξης. Γι' αυτό θα χρησιμοποιήσουμε μετασχηματισμούς L-S, οπότε οι συνελίξεις θα γίνουν γινόμενα και θα έχουμε απλώς αλγεβρικές πράξεις!)

④ Μετασχηματισμοί Laplace-Stieltjes βασικών ποσοτήτων

1] $\tilde{F}_{S_k}(s) \overset{ορσ.}{=} \int_0^\infty e^{-st}\, dF_{S_k}(t) = \left(\tilde{F}_X(s)\right)^k \quad \left(\text{αφού } F_{S_k} = F_X^{*k}\right)$

2] $\tilde{P}_k(s) \overset{ορσ.}{=} \int_0^\infty e^{-st}\, dP_k(t) = \left(\tilde{F}_X(s)\right)^k - \left(\tilde{F}_X(s)\right)^{k+1} = \left(1-\tilde{F}_X(s)\right)\left(\tilde{F}_X(s)\right)^k$

3] $\tilde{m}(s) \overset{ορσ}{=} \int_0^\infty e^{-st}\, dm(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\tilde{F}_X(s)\right)^k = \dfrac{\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)}$

⑤ Υπολογισμός της ανανεωτικής συνάρτησης με αντιστροφή του μετασχηματισμού L-S

$F_X(t) \xrightarrow{\text{εύκολο}} \tilde{F}_X(s) \xrightarrow{\text{εύκολο}} \tilde{m}_X(s) \xrightarrow[\text{αντιστροφή}]{\text{δύσκολο}} m_X(t)$. Για την αντιστροφή, θα χρειαστούμε τα βασικά ζεύγη:

Ζεύγη συναρτήσεων - μετασχηματισμών L-S

$\varphi(t)$	$\tilde{\varphi}(s)$
$1_{\{t \geq 0\}}$	1
t	$\frac{1}{s}$
$1-e^{-\lambda t}$	$\frac{\lambda}{\lambda+s}$
$1-\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^k}{k!}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n$

[Ο στόχος μας είναι, δοθείσης της κατανομής $F_X(t)$, να μπορούμε να βρούμε τη $m(t)$]

(Ομοίως, $F_X(t) \nearrow F_{S_k}(t)$, $F_X(t) \searrow P_k(t)$, αλλά συνήθως γίνεται αριθμητικά και όχι αναλυτικά).

⑥ Παράδειγμα 1: $X \sim Exp(\lambda)$ (στοχαστική διαδικασία Poisson: μοντελοποιεί το να συμβαίνουν γεγονότα εντελώς τυχαία στον χρόνο)

[Εδώ μπορούμε να βρούμε και τα τρία: $m(t)$, $F_{S_k}(t)$, $P_k(t)$, συνήθως μόνο την $m(t)$.]

Ξέρουμε ότι $\underbrace{F_X(t)}_{\text{η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων}} = 1-e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$, $\tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$,

$F_{S_k}(t) = ?$
$P_k(t) = ?$
$m(t) = ?$

Ακολουθούμε τη σειρά $F_X(t) \longrightarrow \tilde{F}_X(s) \longrightarrow \tilde{m}_X(s) \longrightarrow m_X(t)$:

$$\tilde{F}_{S_k}(s) = \left(F_X(s)\right)^k = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^k \underset{\text{πινακάκι}}{\Longrightarrow} F_{S_k}(t) = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

$$P_k(t) = F_{S_k}(t) - F_{S_{k+1}}(t) = \cancel{1} - \sum_{n=0}^{k-1} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} - \cancel{1} + \sum_{n=0}^{k} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} = \underbrace{e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}}_{\text{Poisson}(\lambda t)}.$$

$$\tilde{m}(s) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda+s}}{1-\frac{\lambda}{\lambda+s}} \Rightarrow \underbrace{\tilde{m}(s)}_{\substack{\text{μετασχ. L-S} \\ \text{ανανεωτικής} \\ \text{συνάρτησης}}} = \frac{\lambda}{s} \overset{\text{πινακάκι}}{\Longrightarrow} \underbrace{m(t)}_{\substack{\text{ανανεωτική} \\ \text{συνάρτηση}}} = \lambda t$$

7) <u>Παράδειγμα 2: X μίξη 2 εκθετικών</u> ($X \sim$ Hypergeom)

Ενδιάμεσοι χρόνοι (λέμε απλώς X και όχι X_i, γιατί είναι ισόνομοι)

$$X = \begin{cases} Exp(\lambda), & \text{με πιθ. } p \\ Exp(\mu), & \text{με πιθ. } 1-p \end{cases}, \quad p \in (0,1),\ \lambda \neq \mu. \quad m(t) = ?$$

Ακολουθούμε πάλι την πορεία $F_X(t) \to \tilde{F}_X(s) \to \tilde{m}_X(s) \to m_X(t)$:

$$F_X(t) \underset{\substack{\text{της σ.κ.} \\ \text{μίξης}}}{\overset{\text{γραμμικότητα}}{=}} p\cdot(1-e^{-\lambda t}) + (1-p)\cdot(1-e^{-\mu t}) \xrightarrow[\text{του μετασχημ. L-S}]{\text{γραμμικότητα}}$$

$$\tilde{F}_X(s) = p\cdot\frac{\lambda}{\lambda+s} + (1-p)\cdot\frac{\mu}{\mu+s} = \frac{p\lambda}{\lambda+s} + \frac{(1-p)\cdot\mu}{\mu+s} = \frac{p\lambda(\mu+s)+(1-p)\mu(\lambda+s)}{(\lambda+s)(\mu+s)}$$

$$\Rightarrow \tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda\mu + [p\lambda+(1-p)\mu]s}{(s+\lambda)(s+\mu)} \Rightarrow \tilde{m}_X(s) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)} =$$

$$= \frac{\lambda\mu + [p\lambda+(1-p)\mu]\cdot s}{(s+\lambda)(s+\mu) - \lambda\mu - p\lambda s - (1-p)\mu s} \Rightarrow \tilde{m}_X(s) = \frac{\lambda\mu + [p\lambda+(1-p)\mu]s}{s^2 + (\lambda+\mu)s - p\lambda s - (1-p)\mu s}$$

Αφού έφτασε στη μορφή $\frac{N(z)}{D(z)}$, αναλύουμε σε απλά κλάσματα και χρησιμοποιούμε το πινακάκι (τις δύο τελευταίες σχέσεις). Έχουμε:

$$\tilde{m}_X(s) = \frac{\lambda\mu + [p\lambda+(1-p)\mu]s}{s[s+(1-p)\lambda + p\mu]} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+(1-p)\lambda+p\mu}, \text{ άρα:}$$

Πολλαπλασιάζουμε με s και έχουμε:

$$A + \frac{B \cdot s}{s+(1-p)\lambda+p\mu} = \frac{\lambda\mu + [p\lambda+(1-p)\mu]s}{s+(1-p)\lambda+p\mu} \overset{s=0}{\Longrightarrow} A = \frac{\lambda\mu}{(1-p)\lambda+p\mu}.$$

Ομοίως, για το B πολλαπλασιάζουμε με $s+(1-p)\lambda+p\mu$ και έχουμε:

$$B + \frac{A}{s}\left[s+(1-p)\lambda+p\mu\right] = \frac{\lambda\mu + [p\lambda+(1-p)\mu]s}{s} \xRightarrow{s=-p\mu-(1-p)\lambda} B = \frac{-\lambda\mu+[p\lambda+(1-p)\mu][(1-p)\lambda+p\mu]}{(1-p)\lambda+p\mu}$$

Άρα, $$\tilde{m}_X(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+(1-p)\lambda+p\mu} \Rightarrow$$

$$\tilde{m}_X(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(1-p)\lambda+p\mu} \cdot \frac{(1-p)\lambda+p\mu}{s+[(1-p)\lambda+p\mu]} \xRightarrow[\text{πινακας}]{\text{τελευταίο βήμα}}$$

$$m_X(t) = At + \frac{B}{(1-p)\lambda+p\mu}\left(1-e^{-[(1-p)\lambda+p\mu]}\right)$$ [παρατηρούμε ότι για μεγάλα t η ανανεωτική συνάρτηση γίνεται γραμμική!]