28/3/19
Σ.μ.Ε.Ε.

Μαθημα 9

Ανανεωτική Εξίσωση
Λύση της και ΒΑΘ
Εφαρμογές και Ασκήσεις

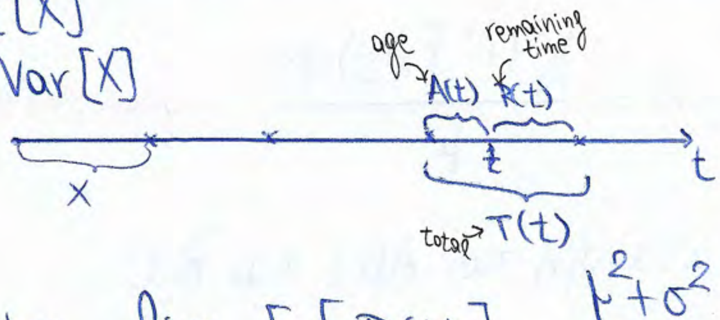
① Υπενθυμίσεις

- Ανανεωτική εξίσωση: $h(t) = d(t) + (h * F_X)(t)$
- Λύση της: $h(t) = d(t) + (d * m_X)(t)$
- Β.Α.Θ.: αν $d(t) = d_1(t) - d_2(t)$, με $d_1, d_2 \geq 0$ φθίνουσες, φραγμένες, $\int_0^\infty |d(t)|dt < \infty$ και X απεριοδική, τότε:

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{\int_0^\infty d(t)dt}{\mu}, \text{ όπου } \mu = E[X].$$

② Ηλικία, Υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης, ολικός χρόνος ανανέωσης

$\mu = E[X]$
$\sigma^2 = Var[X]$



Μελετήσαμε εκτενώς την $h(t) = E[R(t)]$ και δείξαμε

ότι $\lim_{t\to\infty} E[R(t)] = \frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu} = \frac{\mu}{2} + \frac{\sigma^2}{2\mu}$ (ανανεωτικό παράδοξο: $E[X] = \mu$ σημαίνει ότι συμβαίνει γεγονός κάθε μ περίπου, άρα θα περιμέναμε $E[R(t)] = \frac{\mu}{2}$. Όμως, εμπλέκεται και η διασπορά!)

Είδαμε, επίσης, ότι

$$\lim_{t\to\infty} \Pr[R(t)\le x] = F_e(x) = \frac{\int_0^x (1-F_X(y))\,dy}{\mu}.$$

Θα μελετήσουμε τώρα τις $\{A(t)\}$ και $\{T(t)\}$.

$$\underbrace{\{A(t)>x\}}_{\substack{\text{η ηλικία τη στιγμή } t \\ \text{είναι πάνω από } x\text{, άρα δεν} \\ \text{έχει γίνει γεγονός στο } (t-x,t)}} = \{\text{όχι γεγονός της } \{N(t)\} \text{ στο } (t-x,t)\} = \{\underbrace{R(t-x)>x}_{\substack{\text{τη στιγμή } t-x \text{ υπολείπεται χρόνος} \\ \text{πάνω από } x}}\}$$

Άρα, $\lim_{t\to\infty} \Pr[A(t)\le x] = 1-\lim_{t\to\infty}\Pr[A(t)>x] =$

$$= 1-\lim_{t\to\infty}\Pr[R(t-x)>x] = 1-\lim_{u\to\infty}\Pr[R(u)>x] = \lim_{u\to\infty}\Pr[R(u)\le x],$$

δηλαδή η οριακή κατανομή της ηλικίας και του υπολειπόμενου χρόνου ανανέωσης είναι ίδιες και ίσες με F_e (είναι εν μέρει λογικό: έχει να κάνει με την αντιστρεψιμότητα στις Ουρές· ο υπολειπόμενος χρόνος προς τη μία φορά είναι η ηλικία προς την αντίθετη!),

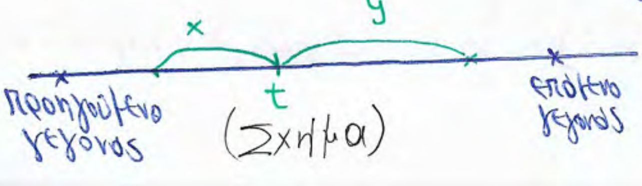
συνεπώς $\lim_{t\to\infty} E[A(t)] = \dfrac{\mu}{2}+\dfrac{\sigma^2}{2\mu}$ και

$$\lim_{t\to\infty}\Pr[A(t)\le x] = F_e(x) = \frac{\int_0^x (1-F_X(y))\,dy}{\mu} \quad \text{(όπως στην } R(t)\text{)}.$$

Μας ενδιαφέρει η ~~από κοινού~~ οριακή κατανομή των $A(t)$ και $R(t)$:

$$\lim_{t\to\infty}\Pr[A(t)>x,\ R(t)>y] = \lim_{t\to\infty}\Pr\begin{bmatrix}\text{όχι γεγονός της } \{N(t)\} \\ \text{στο } (t-x,t+y)\end{bmatrix},$$ αφού έχουμε ισότητα ενδεχομένων:

$$\{A(t)\geq x,\ R(t)\geq y\} = \begin{Bmatrix}\text{όχι γεγονός της} \\ \{N(t)\} \text{ στο } (t-x,t+y)\end{Bmatrix} \quad (\text{βλ. Σχήμα})$$



(Σχήμα)

άρα, $\lim_{t\to\infty} \Pr[A(t)>x, R(t)>y] =$

$$= \lim_{t\to\infty} \Pr[R(t-x)>x+y] = \frac{\int_{x+y}^{\infty} (1-F_X(y))\,dy}{\mu}.$$

Αν μας ενδιαφέρει ο $T(t) = A(t)+R(t)$ (ολικός χρόνος ανανέωσης / t-εξαρτ. ανάν.), τότε

$$\lim_{t\to\infty} E[T(t)] = 2\cdot\frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu} = \frac{\sigma^2+\mu^2}{\mu} = \mu+\frac{\sigma^2}{\mu}$$

(2η εκδοχή του ανανεωτικού παραδόξου: Θα περιμέναμε $\lim_{t\to\infty} E[T(t)]=\mu$, αφού T ο ολικός χρόνος και $E[X]=\mu$ ο μέσος χρόνος κάθε ανανέωσης. Ας πούμε όμως ότι έχουμε εναλλαγές "μικρών" και "μεγάλων" χρόνων ισοπίθανα:

$$X = \begin{cases} \mapsto, & \text{με πιθ. } \frac{1}{2} \\ \longmapsto, & \text{με πιθ. } \frac{1}{2} \end{cases}$$

. Ναι μεν είναι ισοπίθανοι "μικροί" και "μεγάλοι" χρόνοι, αλλά η πιθανότητα να πέσουμε σε διάστημα "μεγάλου" χρόνου είναι προφανώς μεγαλύτερη, λόγω του μήκους των διαστημάτων. Έτσι, λοιπόν, δικαιολογείται η αύξηση σ^2/μ στο $\lim_{t\to\infty} E[T(t)]$). Έχουμε, επίσης, ότι

$$\lim_{t\to\infty} \Pr[T(t)\leq x] = \frac{\int_0^x y f_X(y)\,dy}{\mu}$$

(άσκηση. Υπόδειξη: ξεκινάμε με τη συμπληρωματική πιθανότητα $\Pr[T(t)>x]$ και εκεί πέρα χρησιμοποιούμε ανανεωτικό συλλογισμό.)

Θα δούμε τώρα Ασκήσεις-Εφαρμογές από το αρχείο στην e-class.

③ <u>Άσκηση 2.7</u>

Έστω $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_X(t)$ και $m_X(t) = E[N(t)]$. Έστω $h(t) = E[N(t)(N(t)-1)]$. Να διατυπωθεί ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$ και να αποδειχθεί ότι $h(t) = 2(m_X * m_X)(t)$.

<u>Λύση</u>: Έστω S_1 ο πρώτος χρόνος ανανέωσης της $\{N(t)\}$ (Βήμα 1: ανανεωτικός συλλογισμός). Τότε, δεσμεύοντας στον S_1, έχουμε

$$h(t) = E\big[\,E[N(t)(N(t)-1) \mid S_1]\,\big] = \int_0^\infty E[N(t)(N(t)-1) \mid S_1 = u]\, d\underbrace{F_X(u)}_{X \overset{d}{=} S_1},$$

όπου (Βήμα 2: φτιάχνουμε τους κλάδους ⇝ προσοχή εδώ!)

$$E[N(t)(N(t)-1) \mid S_1 = u] = \begin{cases} 0, & u > t \ \text{(αφού τη στιγμή } t \text{ δεν έχει γίνει γεγονός, έχουμε ότι } N(t)=0\text{)} \\ E\big[\underbrace{(1+N(t-u))N(t-u)}\big], & u \le t \end{cases}$$

αφού για $u \le t$ έχουμε $(N(t) \mid S_1 = u) \overset{d}{=} 1 + N(t-u)$, όπου βλέπουμε $N(t)$ βάζουμε $1 + N(t-u)$

Θέλουμε να εμφανίσουμε την $h(t-u)$ στον 2ο κλάδο, άρα:

$$E[(1+N(t-u))N(t-u)] = E[(N(t-u))^2] + E[N(t-u)] =$$
$$= 2E[N(t-u)] + E[N(t-u)(N(t-u)-1)] = 2m_X(t-u) + h(t-u).$$

Σπάμε τώρα το ολοκλήρωμα (Βήμα 3) και η $h(t)$ γίνεται:

$$h(t) = \int_t^\infty \cancel{0\, dF_X(u)}^{\,0} + \int_0^t (2m_X(t-u) + h(t-u))\, dF_X(u) \xrightarrow[\text{συνέλιξη } h*F_X]{\text{θέλουμε να εμφανίσουμε τη}}$$

$$h(t) = 2\int_0^t m_X(t-u)\, dF_X(u) + \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u) \Rightarrow$$

$$h(t) = \underbrace{2(m_X * F_X)(t)}_{d(t)} + (h * F_X)(t)$$, η ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$

Η λύση της είναι:

$$h(t) = d(t) + (d * m_X)(t) = 2(m_X * F_X)(t) + 2(m_X * F_X * m_X)(t) \quad (1)$$

Όμως, από την ανανεωτική εξίσωση για την ανανεωτική συνάρτηση $m_X(t)$ (Μάθημα 6, σελίδα 6), παίρνουμε ότι

$$m_X(t) = F_X(t) + (m_X * F_X)(t) \Rightarrow (m_X * F_X)(t) = m_X(t) - F_X(t) \quad (2)$$

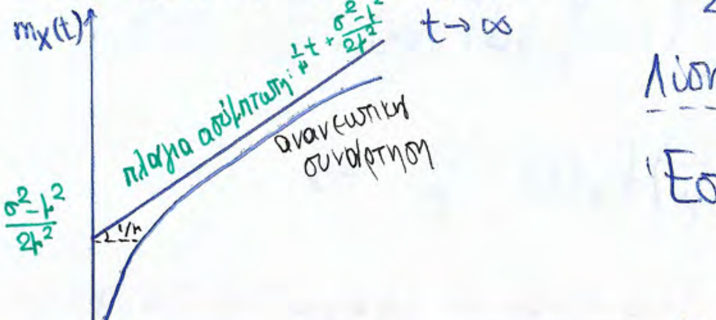
Από τις (1) και (2), παίρνουμε:

$$h(t) = 2\cancel{m_X}(t) - 2\cancel{F_X}(t) + 2(m_X * m_X)(t) - 2(\cancel{F_X} * m_X)(t) \overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$h(t) = 2(m_X * m_X)(t).$$

④ <u>Άσκηση 2.10</u>

Έστω $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία με συνεχή σ.κ. ενδιάμεσων χρόνων $F_X(x)$, έστω $E[X] = \mu \in (0,\infty)$, $Var[X] = \sigma^2 \in (0,\infty)$, $m_X(t) = E[N(t)]$, $h(t) = m_X(t) - \frac{t}{\mu}$ (ξέρουμε από Σ.Α.Θ. ότι $\lim_{t\to\infty} \frac{m_X(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$, άρα αυτό που ψάχνουμε μελετώντας την $h(t) = m_X(t) - \frac{t}{\mu}$ είναι με ποιον τρόπο πάει η $\frac{m_X(t)}{t}$ στο $\frac{1}{\mu}$). Να βρεθεί ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$ και να αποδειχθεί ότι $\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2}$.



<u>Λύση</u>: (Τα γνωστά 3 βήματα!)

Έστω S_1 ο χρόνος πρώτης ανανέωσης.

Τότε, $h(t) = E[N(t)] - \frac{t}{\mu} =$

$= \int_0^\infty E[N(t) | S_1 = u]\, dF_X(u)$, όπου

$$E[N(t)|S_1=u] = \begin{cases} 0, & u>t \\ 1+E[N(t-u)], & u\le t \end{cases}$$ $\overset{\text{θέλουμε να}}{\Longrightarrow}$ εμφανίσουμε την $h(t-u)=E[N(t-u)]-\frac{t-u}{\mu}$

$$E[N(t)|S_1=u] = \begin{cases} 0, & u>t \\ 1+h(t-u)+\frac{t-u}{\mu}, & u\le t \end{cases}$$. Σπάμε τώρα το ολοκλήρωμα και έχουμε:

$$h(t) = \int_0^t \left(1+h(t-u)+\frac{t-u}{\mu}\right) dF_X(u) - \frac{t}{\mu} + \int_t^\infty \cancel{0\, dF_X(u)}^{\,0} \Rightarrow$$

$$h(t) = \underbrace{\int_0^t \left(1+\frac{t-u}{\mu}\right) dF_X(u) - \frac{t}{\mu}}_{d(t)} + \underbrace{\int_0^t h(t-u)\, dF_X(u)}_{(h*F_X)(t)}$$, η ανανεωτική

εξίσωση για την $h(t)$. Εδώ δε ζητείται η λύση της $h(t)$ (λόγω πολυπλοκότητας), αλλά κατευθείαν το $\lim_{t\to\infty} h(t)$. Σκεφτόμαστε ΒΑΘ, όμως δεν είναι απ' ευθείας εφαρμόσιμο γιατί δεν είναι καθόλου προφανές ότι $d=d_1-d_2$, όπου $d_1, d_2 \geq 0$, φθίνουσες και φραγμένες (μέχρι τώρα ήταν έτοιμο: παίρναμε $d_1=d\downarrow$ και $d_2=0$. Τώρα θα δούμε μία ωραία τεχνική). Δουλεύουμε ως εξής:

Έχουμε, $$d(t) = \frac{t}{\mu}F_X(t) + \int_0^t \left(1-\frac{u}{\mu}\right) dF_X(u) - \frac{t}{\mu} \overset{d/dt}{\Longrightarrow}$$

$$d'(t) = \frac{1}{\mu}F_X(t) + \frac{t}{\mu}f_X(t) + \left(1-\frac{t}{\mu}\right)f_X(t) - \frac{1}{\mu} \Rightarrow$$

$$d'(t) = \overbrace{f_X(t)}^{(+)} - \frac{1}{\mu}\overbrace{(1-F_X(t))}^{(+)}$$ (η ιδέα είναι να γράψω την παράγωγο ως "(θετικό) − (θετικό)", που στην $d(t)$ αντιστοιχεί σε "(αύξουσα)-(αύξουσα)" και μετά φτιάχνουμε εύκολα το "(φθίνουσα) − (φθίνουσα)"), οπότε

$d(t) = \int_0^t f_X(u)du - \int_0^t \frac{1-F_X(u)}{\mu} du$. Βρίσκουμε κοινά φράγματα:

- $\int_0^t f_X(u)\,du \underset{f\uparrow}{\leq} \int_0^\infty f_X(u)du = 1$

- $\int_0^t (1-F_X(u))du \leq \int_0^\infty (1-F_X(u))\,du = E[X] = \mu \Rightarrow \int_0^t \frac{1-F_X(u)}{\mu} du \leq 1$

Το προσθαφαιρούμε:

$$d(t) = \left(1 - \int_0^t \frac{1-F_X(u)}{\mu} du\right) - \left(1 - F_X(t)\right) = \left(1-F_e(t)\right) - \left(1-F_X(t)\right).$$

Παίρνουμε $d_1(t) = 1 - F_e(t)$, $d_2(t) = 1 - F_X(t)$ και έχουμε τώρα ότι $d(t) = d_1(t) - d_2(t)$, όπου $d_1, d_2 \geq 0$, φθίνουσες και φραγμένες. Ελέγχουμε τώρα ότι $\int_0^\infty |d(t)|dt < \infty$. Έχουμε:

$$\int_0^\infty |d(t)|\,dt = \int_0^\infty |d_1(t) - d_2(t)|dt \leq \int_0^\infty d_1(t)dt + \int_0^\infty d_2(t)dt,$$

όπου $\int_0^\infty d_2(t)\,dt = \int_0^\infty (1-F_X(t))dt = E[X] = \mu < \infty$ και

$$\int_0^\infty d_1(t)dt = \int_0^\infty (1-F_e(t))\,dt = E[X_e] = \frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu} < \infty,$$ οπότε

$\int_0^\infty |d(t)|dt < \infty$. Τελικά, το ΒΑΘ εφαρμόζεται και παίρνουμε

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{\int_0^\infty d(t)dt}{\mu} = \frac{\int_0^\infty d_1(t)dt - \int_0^\infty d_2(t)dt}{\mu} = \frac{\frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu} - \mu}{\mu} \Rightarrow$$

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2}.$$

("Εδώ τελειώνει ένα σημαντικό κομμάτι του μαθήματος Σ.μ.Ε.Ε., το πιο δύσκολο. Σχεδόν πάντα ακολουθούμε τα γνωστά 3 βήματα")