4/4/19 Μάθημα 11

Σ.μ.ε.ε.

Διαδικασία Poisson
Ιδιότητες

[θα δούμε ιδιότητες που δεν ισχύουν γενικά σε ανανεωτικές διαδικασίες, αλλά στη διαδικασία Poisson]

① Ερωτήματα

1) Έστω $\{N(t)\}$ στοχαστική διαδικασία Poisson, με χρόνους γεγονότων $S_1, S_2, \ldots$. Ποια είναι η κατανομή της $(S_1, S_2, \ldots, S_n \mid N(t)=n) \sim ?$ Αν δηλαδή ξέρουμε το πλήθος γεγονότων σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, πότε συνέβη το καθένα? ⇝ την απάντηση θα τη δώσει το Θεώρημα Campbell.

2) Έστω $\{N_i(t)\}$ στοχαστικές διαδικασίες Poisson, $i=1,2,\ldots$, ανεξάρτητες, και $N(t)=\sum_{i=1}^{\infty} N_i(t)$ (π.χ. $N_1(t)$ = # κοριτσιών τη στιγμή t, $N_2(t)$ = # αγοριών τη στιγμή t, $N(t)$ = # ανθρώπων την t).
Είναι η $\{N(t)\}$ διαδικασία Poisson? (υπέρθεση)
Την απάντηση θα δώσει το θεώρημα υπέρθεσης.

3) Έστω $\{N(t)\}$ στοχαστική διαδικασία Poisson. Κάθε γεγονός είναι τύπου i με πιθανότητα p_i, $i=1,2,\ldots$. Είναι κάθε $\{N_i(t)\}$ στοχαστική διαδικασία Poisson? (διάσπαση)
Την απάντηση θα δώσει το θεώρημα διάσπασης.

② Θεώρημα Campbell

για n=1 γεγονότα

<u>Θεώρημα</u> Έστω $\{N(t)\}$ στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και $S_1, S_2, \dots$ οι χρόνοι των γεγονότων. Τότε,

$$(S_1 \mid N(t)=1) \sim \text{Uniform}([0,t]).$$

<u>Απόδειξη:</u> Θα δείξουμε ότι η σ.κ. της $(S_1 \mid N(t)=1)$ είναι ίδια με τη σ.κ. της Uniform$([0,t])$. Έχουμε:

$$F_{S_1 \mid N(t)=1}(x) = \Pr[S_1 \le x \mid N(t)=1].$$

Για $x<0$, $F_{S_1 \mid N(t)=1}(x) = 0$.

Για $x>t$, $F_{S_1 \mid N(t)=1}(x) = 1$ (αφού $N(t)=1$, τη στιγμή t έχει γίνει 1 γεγονός)

Για $x \in [0,t]$, είναι

$$F_{S_1 \mid N(t)=1}(x) = \frac{\Pr[\underbrace{S_1 \le x}_{\text{παραπέμπει στον 1ο ορισμό της σ.δ. Poisson}},\ \underbrace{N(t)=1}_{\text{παραπέμπει στον 2ο ορισμό της σ.δ. Poisson}}]}{\Pr[N(t)=1]}$$

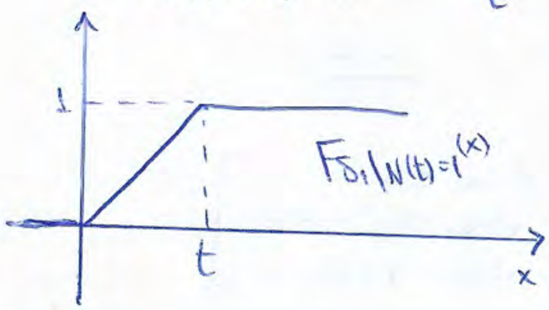
τα μεταφέρουμε όλα σε έναν ορισμό, στον πιο βολικό· συνήθως στον 2ο (άρα τα εκφράζουμε όλα με $N(t)$)

$$= \frac{\Pr[N(x) \overset{\text{γίνεται "=" διότι } x\le t}{\ge} 1,\ N(t)=1]}{\Pr[N(t)=1]} \underset{\text{μορφή για ανεξ. προσαυξήσεις}}{\overset{\text{το πάμε σε έκφραση}}{=}} \frac{\Pr[N(x)=1,\ N(t)-N(x)=0]}{\Pr[N(t)=1]}$$

$$\underset{\text{προσαυξήσεις}}{\overset{\text{ανεξ.}}{=}} \frac{\Pr[N(x)=1]\cdot \Pr[N(t)-N(x)=0]}{\Pr[N(t)=1]} \underset{\text{προσαυξήσεις}}{\overset{\text{ομογενείς}}{=}}$$

$$\frac{\Pr[N(x)=1]\cdot \Pr[N(t-x)=0]}{\Pr[N(t)=1]} = \frac{e^{-\lambda x}\cdot \frac{(\lambda x)^1}{1!}\cdot e^{-\lambda(t-x)}\cdot \frac{(\lambda(t-x))^0}{0!}}{e^{-\lambda t}\cdot \frac{(\lambda t)^1}{1!}} \Rightarrow$$

$$F_{S_1|N(t)=1}(x) = \frac{x}{t} = F_{Uniform([0,t])}(x), \text{ άρα } (S_1 \mid N(t)=1) \sim Uniform([0,t])$$



③ Προαπαιτούμενα για Θεώρημα Campbell για $n>1$: Διατεταγμένες τ.μ.

Έστω τυχαία μεταβλητή $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ και $X_{i:n}$ η i-οστή μικρότερη συντεταγμένη του $\underline{X}$, π.χ. $X_{1:n} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ και $X_{n:n} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Οι $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ λέγονται διατεταγμένες τ.μ. της X και μας ενδιαφέρει αν ξέρουμε τη σ.κ. της $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, να βρούμε τη σ.κ. της $(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n})$ [γενικά δύσκολο ερώτημα, αλλά για ειδικές περιπτώσεις γίνεται σχετικά εύκολο]. Αν $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, συνεχείς με σ.κ. $F(x)$ και σ.π.π. $f(x)$, τότε η κατανομή της $(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n})$ υπολογίζεται. Υπολογίζουμε για αρχή ξεχωριστά:

π.χ. η $5^η$ μικρότερη είναι κάτω από x ⟺ τουλ. 5 είναι κάτω από x

(ισχύει η ισοδυναμία, γι' αυτό οι πιθανότητες είναι ίσες)

$$F_{X_{i:n}}(x) = Pr[X_{i:n} \le x]$$

$$= Pr[\text{τουλάχιστον } i \text{ από τις } X_1, \dots, X_n \text{ είναι } \le x]$$

$$= Pr\begin{bmatrix}\text{τουλάχιστον } i \text{ επιτυχιών σε} \\ n \text{ ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθ. επιτυχίας } F(x)\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow F_{X_{i:n}}(x) = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} \cdot (F(x))^k \cdot (1-F(x))^{n-k}$$

Για τη σ.π.π. $f_{X_{i:n}}(x)$ μπορούμε να παραγωγίσουμε την $F_{X_{i:n}}(x)$, αλλά σκεφτόμαστε λίγο πιο έξυπνα και θυμόμαστε από Πιθανότητες I ότι

$$f_{X_{i:n}}(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr[x < X_{i:n} \le x+h]}{h}$$

παρόμοιο σκεπτικό με πριν

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\Pr\begin{bmatrix} i-1 \text{ από τις } X_1,\dots,X_n \text{ είναι } \le x \\ 1 \text{ από τις } X_1,\dots,X_n \text{ είναι στο } (x,x+h] \\ n-i \text{ από τις } X_1,\dots,X_n \text{ είναι } > x+h \end{bmatrix}}{h}$$

λίγη συνδυαστική τώρα

$$= \underbrace{\binom{n}{i-1}}_{\text{με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε } i-1 \text{ από } n} \cdot \binom{n-i+1}{1} \cdot \binom{n-i}{n-i} \cdot (F(x))^{i-1} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}}_{f(x)} \cdot (1-F(x+h))^{n-i} \Rightarrow$$

$$f_{X_{i:n}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!\cdot 1!\cdot (n-i)!} \cdot (F(x))^{i-1} \cdot f(x) \cdot (1-F(x))^{n-i}$$

[διαισθητικά, είναι λογικό:
Θέλουμε την $f_{X_{i:n}}(x)$, άρα περίπου την πιθανότητα η $X_{i:n}$ να είναι x. Αυτός ο τύπος που βγάλαμε, είναι λογικός:

- $\frac{n!}{(i-1)!\,1!\,(n-i)!}$: από τις n, με πόσους τρόπους μπορούμε να βρούμε $(i-1)$-το πλήθος μικρότερες από x, 1 περίπου ίση με x και $(n-i)$-το πλήθος μεγαλύτερες από x (έτσι μεταφράζεται το "η i-οστή μικρότερη τ.μ. περίπου ίση με x")

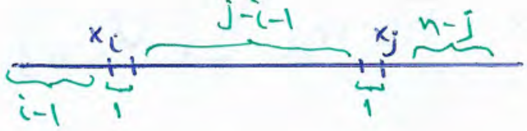
- $(F(x))^{i-1}$: θέλουμε $(i-1)$ μικρότερες από x, άρα αυτό γίνεται με πιθ. $\underbrace{F(x)\cdot\ldots\cdot F(x)}_{i-1} = (F(x))^{i-1}$

- $f(x)$: μία "περίπου" ίση με x

- $(1-F(x))^{n-i}$: θέλουμε $(n-i)$ μεγαλύτερες από x, άρα αυτό γίνεται με πιθ. $\underbrace{(1-F(x))\cdot\ldots\cdot(1-F(x))}_{n-i} = (1-F(x))^{n-i}$]

Δίνουμε άλλο ένα παράδειγμα, που καταδεικνύει πόσο λειτουργικός είναι αυτός ο (διαισθητικά κατανοητός) τύπος:

Για $i<j$,

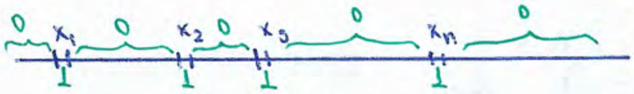


$$f_{(X_{i:n},X_{j:n})}(x_i,x_j)=\begin{cases}0, & x_i\geq x_j\\ \dfrac{n!}{(i-1)!\cdot 1!\cdot (j-i-1)!\cdot 1!\cdot (n-j)!}\big(F(x_i)\big)^{i-1}\cdot f(x_i)\cdot\big(F(x_j)-F(x_i)\big)^{j-i-1}\cdot \\ \qquad\cdot f(x_j)\cdot\big(1-F(x_j)\big)^{n-j}, & x_i<x_j\end{cases},$$

η από κοινού σ.π.π. & τ.μ. των $X_{i:n}$ και $X_{j:n}$. Κατ' αναλογία, βρίσκουμε την από κοινού σ.π.π. των $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$:

$$f_{(X_{1:n},X_{2:n},\ldots,X_{n:n})}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{cases}0, & \text{διαφορετικά}\\ \underbrace{n!}_{\text{στην ουσία είναι } \frac{n!}{0!1!\ldots0!1!0!}=n!}\cdot f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot\ldots\cdot f(x_n), & x_1<x_2<\ldots<x_n\end{cases}$$

[αν οι x_i δεν είναι στη "σωστή"-αύξουσα σειρά, τότε προφανώς είναι 0, αφού οι $X_{i:n}$ είναι εξ' ορισμού διατεταγμένες)



Όταν $F(x)$ είναι η σ.κ. της Uniform$([0,t])$, τότε

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x}{t}, & 0\leq x\leq t\\ 1, & x>t\end{cases} \quad \text{και} \quad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{t}, & x\in[0,t]\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases},$$

και οι τύποι που είδαμε γίνονται:

- $$F_{U_{i:n}}(x)=\sum_{k=i}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{t}\right)^k\left(1-\frac{x}{t}\right)^{n-k}, \quad 0\leq x\leq t$$

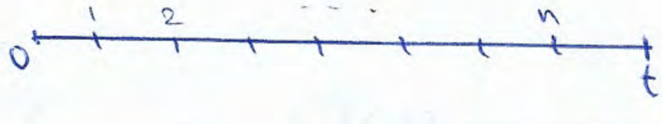
δεν χρειάζεται να τις θυμάστε

- $$f_{U_{i:n}}(x)=\frac{n!}{(i-1)!\,1!\,(n-i)!}\cdot\left(\frac{x}{t}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{t}\cdot\left(1-\frac{x}{t}\right)^{n-i}, \quad 0\leq x\leq t$$

$$f_{(U_{1:n},\dots,U_{n:n})}(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n}, & 0\le x_1<x_2<\dots<x_n\le t \\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

σημαντικό για τις ΣΔΕΕ

• Για την $E[U_{i:n}]$, το βλέπουμε διαισθητικά:



Σπάμε το $[0,t]$ σε $n+1$ κομμάτια και σκεφτόμαστε την $E[U_{i:n}]$ ως "σε ποιο κομμάτι θα πέσει η i-οστή μικρότερη ομοιόμορφη?", άρα $E[U_{i:n}] = \frac{it}{n+1}$. Η διαίσθηση για αυτό το αποτέλεσμα είναι ότι οι n το πλήθος ομοιόμορφες χωρίζουν το $[0,t]$ σε $n+1$ το πλήθος κομμάτια μήκους $\frac{t}{n+1}$. Για αυστηρή απόδειξη, έχουμε:

$$E[U_{i:n}] = \int_0^t x\cdot f_{U_{i:n}}(x)\,dx = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!\cdot t^n}\cdot\int_0^t x^i\cdot(t-x)^{n-i}\,dx \overset{\frac{x}{t}=u}{=\!=}$$

$$= \frac{n!\cdot \cancel{t^i}\cancel{t^{n-i}}\cdot t}{(i-1)!\cdot(n-i)!\cdot\cancel{t^n}}\cdot\underbrace{\int_0^1 u^i\cdot(1-u)^{n-i}\,du}_{B(i+1,\,n-i+1)} =$$

$$= \frac{n!\cdot t}{(i-1)!(n-i)!}\cdot B(i+1,n-i+1) = \frac{n!\cdot t}{(i-1)!(n-i)!}\cdot\frac{\Gamma(i+1)\cdot\Gamma(n-i+1)}{\Gamma(n+2)} =$$

$$= \frac{n!\cdot t}{(i-1)!\cdot\cancel{(n-i)!}}\cdot\frac{i!\cdot\cancel{(n-i)!}}{(n+1)!} = \underbrace{\frac{i!}{(i-1)!}}_{i}\cdot\underbrace{\frac{n!}{(n+1)!}}_{\frac{1}{n+1}}\cdot t = \frac{i\cdot t}{n+1}.$$

[Αυτά που πρέπει να κρατήσουμε από τις διατεταγμένες τ.μ. είναι οι βασικές ιδέες για το πώς από τη σ.κ. των $X_1,\dots,X_n$ βρίσκουμε τη σ.κ. των $X_{1:n},\dots,X_{n:n}$ και να θυμόμαστε τις $f_{(U_{1:n},\dots,U_{n:n})}(x_1,\dots,x_n)$ και $E[U_{i:n}]=\frac{it}{n+1}$.]

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το Θεώρημα Campbell στη γενική του μορφή:

4 Θ. Campbell για $n>1$

<u>Θεώρημα</u> Έστω $\{N(t)\}$ στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και χρόνους γεγονότων $S_1, S_2, \dots$. Τότε,

$$(S_1, S_2, \dots, S_n \mid N(t)=n) \overset{d}{=} (U_{1:n}, U_{2:n}, \dots, U_{n:n}),$$

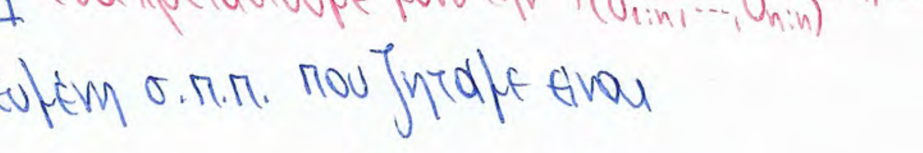
όπου $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. που ακολουθούν Uniform($[0,t]$).

<u>Απόδειξη</u> (θα χρειαστούμε μόνο την $f_{(U_{1:n},\dots,U_{n:n})}(x_1,\dots,x_n)$) :
Η δεσμευμένη σ.π.π. που ζητάμε είναι

$$f_{(S_1,S_2,\dots,S_n\mid N(t)=n)}(s_1,s_2,\dots,s_n) =$$

$$= \lim_{h_1,\dots,h_n\to 0^+} \frac{\Pr[s_1 < S_1 \le s_1+h_1,\ s_2 < S_2 \le s_2+h_2, \dots, s_n < S_n \le s_n+h_n,\ N(t)=n]}{h_1 h_2 \cdot \dots \cdot h_n \cdot \Pr[N(t)=n]}$$

[σχήμα που λύνει "τα πάντα":



$e^{-\lambda s_1}\cdot\frac{(\lambda s_1)^0}{0!}$ $\quad e^{-\lambda h_1}\cdot\frac{(\lambda h_1)^1}{1!}$ $\quad$ άρα $e^{-\lambda s_1}\cdot \dots \cdot e^{-\lambda s_n} = e^{-\lambda(s_1+\dots+s_n)} = e^{-\lambda t}$,

και το κλάσμα απλοποιείται τελείως:]

$$= \lim_{h_1,\dots,h_n\to 0^+} \frac{e^{-\lambda t}\cdot \lambda \cancel{h_1}\cdot \lambda \cancel{h_2}\cdot \dots \cdot \lambda \cancel{h_n}}{\cancel{h_1}\cdot \cancel{h_2}\cdot \dots \cdot \cancel{h_n}\cdot e^{-\lambda t}\cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!}} = \frac{n!}{t^n}$$