Διαδικασία Poisson: Εναλλακτικοί ορισμοί – Βασικοί υπολογισμοί

① Βασικά θέματα

- Ορισμοί
- Βασικοί υπολογισμοί: $\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson με ρυθμό λ

S_n: χρόνος n-οστού γεγον $\sim$ Erlang(n, λ) = Αθρ. n ανεξ. Exp(λ)

$$\Pr[S_n \le t] = \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} u^{n-1} e^{-\lambda u}\, du$$

$$\Pr[N(t) \ge n] = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

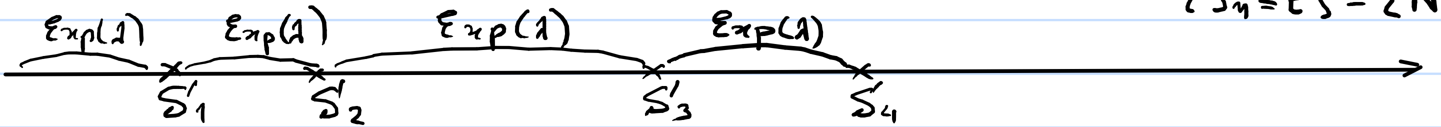
$N(t) = \#$ γεγον. στο $(0,t] \sim$ Poisson(λt)

$$\Pr[N(t)=k] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k=0,1,\dots$$

$$P_{N(t)}(z) = e^{-\lambda t(1-z)}$$

$$E[N(t)] = \lambda t$$

$$\{S_n \le t\} = \{N(t) \ge n\}$$



② Ασκ. 3.1 / Φυλ. 1

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson με ρυθμό λ

$E[\underbrace{N(t)(N(t)-1)(N(t)-2)\cdots(N(t)-k+1)}_{k \text{ όροι}}]$: Παραγοντική ροπή k-τάξης = ;

Λύση:

~~1ος τρόπος~~

$$P_{N(t)}(z) = e^{-\lambda t(1-z)} \Longrightarrow E[N(t)(N(t)-1)\cdots(N(t)-k+1)] = P_{N(t)}^{(k)}(1)$$

Παραγ. ως προς z

$$= e^{-\lambda t}\cdot e^{\lambda t z}$$

$$= (\lambda t)^k e^{-\lambda t} e^{\lambda t z}\Big|_{z=1}$$

$$= \underline{\underline{(\lambda t)^k}}$$

2ος τρόπος:

$$E[N(t)(N(t)-1)\cdots(N(t)-k+1)] = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}_{\frac{n!}{(n-k)!}} \cdot \underbrace{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}}_{\Pr[N(t)=n]}$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\cancel{n!}}{(n-k)!} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{\cancel{n!}} \underset{n-k=j}{=} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j+k}}{j!} = \underline{\underline{(\lambda t)^k}} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}}_{=1}$$

③ Ασκ. 3.3 / φυλ. 1

$\{N(t): t \geq 0\}$ σ.δ. Poisson με ρυθμό λ

$Pr[N(t)$ περιττός$] = ;$

Λύση:

$$Pr[N(t) = 2n+1] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$Pr[N(t) \text{ περιττός}] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{2n+1}}{(2n+1)!} = e^{-\lambda t} \left(\frac{\lambda t}{1!} + \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \frac{(\lambda t)^5}{5!} + \ldots \right)$$

$$Pr[N(t) \text{ περιττός}] + Pr[N(t) \text{ άρτιος}] = 1$$

$$-Pr[N(t) \text{ περιττός}] + Pr[N(t) \text{ άρτιος}] = e^{-\lambda t} \left(\frac{(\lambda t)^0}{0!} - \frac{(\lambda t)^1}{1!} + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \ldots \right)$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-2\lambda t}$$

$$\Rightarrow 2\, Pr[N(t) \text{ περιττός}] = 1 - e^{-2\lambda t} \Rightarrow Pr[N(t) \text{ περιττός}] = \frac{1 - e^{-2\lambda t}}{2}.$$

$$P_{N(t)}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} Pr[N(t)=n]\cdot 1^n = \cancel{Pr[N(t)=0]} + Pr[N(t)=1] + \cancel{Pr[N(t)=2]} + \dots$$

$$-P_{N(t)}(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} Pr[N(t)=n](-1)^n = -\cancel{Pr[N(t)=0]} + Pr[N(t)=1] + \cancel{Pr[N(t)=2]} + \dots$$

$$P_{N(t)}(1) - P_{N(t)}(-1) = 2\left(\underbrace{Pr[N(t)=1] + Pr[N(t)=3] + Pr[N(t)=5] + \dots}_{Pr[N(t)\ \text{περιττός}]}\right)$$

$\Downarrow$

$$Pr[N(t)\ \text{περιττός}] = \frac{P_{N(t)}(1) - P_{N(t)}(-1)}{2} = \frac{1 - e^{-2\lambda t}}{2}$$

$$P_{N(t)}(z) = e^{-\lambda t(1-z)}$$

④ Ασκ. 3.4 / Φυλ. 1

Πελάτες φθάνουν σύμφωνα με σ.δ. Poisson με ρυθμό $\lambda = 8$ πελ./ώρα

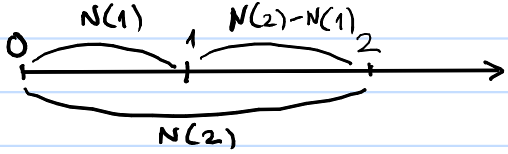
1) Μέσο # πελ. σε 1 οκτάωρο, Διασπορά.

2) Π.Θ. όχι πελ. στα τελ. 15'

3) Συνδιακ. # πελ. στο διαστ. 9:00 − 11:00 (Δευτ.) και 10:00 − 11:00 (Δευτ.) (ίδια μέρα)

4) — " — 9:00 − 11:00 (Δευτ.) και 10:00 − 11:00 (Τρίτη) (επομ. μέρα)

Λύση:



Χρονική μονάδα: ώρα

Αρχή χρόνου: 9^{00} σήμερα (Δευτ.)

1) $E[N(t+8)-N(t)] \underset{\text{ομογ. προσαυξ.}}{=} E[N(8)] = \underset{\lambda}{8} \cdot \underset{t}{8} = 64$

$Var[N(t+8)-N(t)] = Var[N(8)] = 8 \cdot 8 = 64$

2) $Pr[N(1/4)=0] = e^{-8 \cdot 1/4} \cdot \frac{(8 \cdot 1/4)^0}{0!} = e^{-2}$

3) $Cov[N(2), N(2)-N(1)] = Cov[N(1)+(N(2)-N(1)), N(2)-N(1)]$

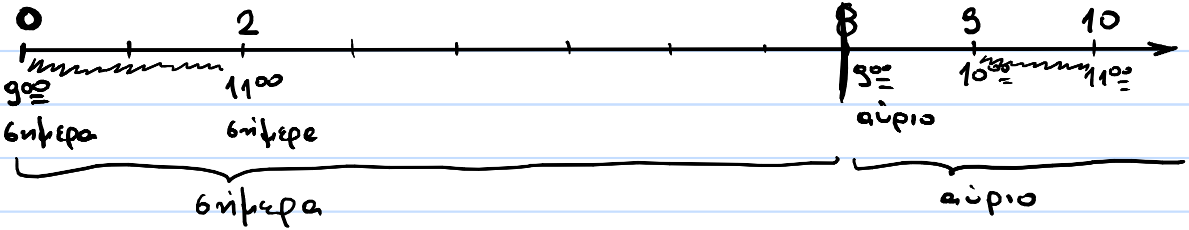
$= Cov[N(1), N(2)-N(1)] + Cov[N(2)-N(1), N(2)-N(1)] = \overset{\text{ανεξ. προσ.}}{0} + Var(N(2)-N(1))$

$\underset{\text{ομογ. προσ}}{=} \mathrm{Var}(N(1)) = 8 \cdot 1 = 8.$

4) # αφίξεων στο 9-11 σήμερα
    # αφίξεων στο 10-11 αύριο } ανεξ. λόγω ανεξ. προσ. $\Rightarrow \mathrm{Cov} = 0.$

ξένα χρονικά διαστ.

ή αλλιώς



$\mathrm{Cov}[N(2), N(10) - N(9)] = 0.$

ανεξ. γιατί $[0,2] \cap [9,10] = \emptyset$

⑤ Ασκ. 3.13 / φυλ. 1

Μηχάνημα με $Exp(\lambda)$ χρόνο ζωής.

Επιθεωρήσεις κατά μέσο όρο κάθε $\tau = 1/\mu$ χρον. μονάδες

(τ: μέσος χρόνος μεταξύ επιθεωρ. , μ: ρυθμός επιθεωρ = επιθ/χρον. μον.)

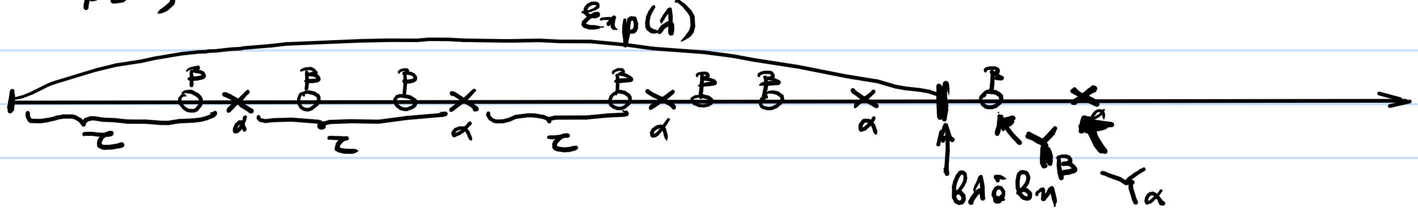
Σενάριο επιθεωρ α: Επιθεωρήσεις τις στιγμές $0, \tau, 2\tau, 3\tau, \ldots$ (ντετερμ.)

— " — β: — " — μιας σ.δ. Poisson με ρυθμό μ.

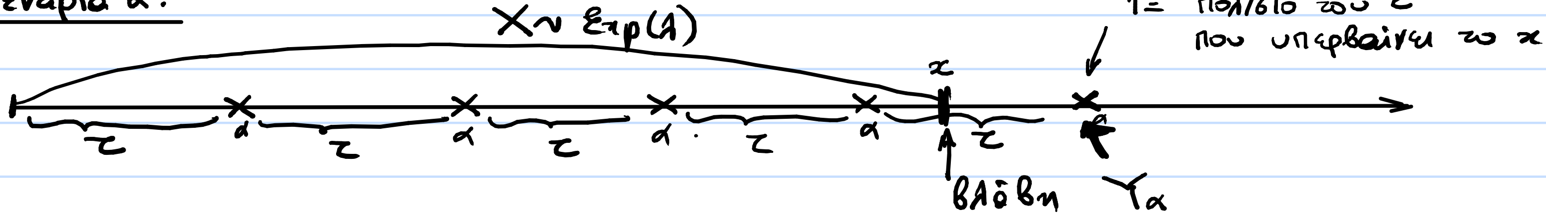
$Y_{\alpha \text{ ή } \beta}$ = Χρόνος που ανακαλύπτεται η βλάβη

$E[Y_\alpha] = ;$ Ποιος τρόπος επιθεωρήσεων είναι καλύτερος;

$E[Y_\beta] = ;$



Σενάρια α:



$$E[Y_\alpha] = E[E[Y_\alpha \mid X]] = \int_0^\infty E[Y_\alpha \mid X = x] f_X(x)dx$$

$$= \int_0^\infty \left(\left\lfloor \frac{x}{\tau} \right\rfloor + 1\right)\cdot \tau \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \left(\overbrace{\left\lfloor \frac{x}{\tau} \right\rfloor}^{=n} + 1\right) \tau \lambda e^{-\lambda x} dx$$

\# επιθ. πριν τη βλάβη

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} (n+1)\tau\lambda e^{-\lambda x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\tau \underbrace{\int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \lambda e^{-\lambda x} dx}_{\cancel{1} - e^{-\lambda(n+1)\tau} \cancel{- 1} + e^{-\lambda n\tau}}$$

$$\underbrace{-e^{-\lambda(n+1)\tau} + e^{-\lambda n \tau}}_{e^{-\lambda n\tau}(1-e^{-\lambda\tau})}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\tau \, e^{-\lambda n\tau}(1-e^{-\lambda\tau})$$

$$= (1-e^{-\lambda\tau})\tau \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(e^{-\lambda\tau})^n$$

$$E[Y_a] = (1-e^{-\lambda\tau})\,\tau \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(e^{-\lambda\tau}\right)^n}_{} \longrightarrow \text{Προς υπολογισμό.}$$

Έχω

1] $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \overset{d/dx}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} n\,x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \overset{\cdot x}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} n\,x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$

2] $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = \frac{1-x}{(1-x)^2}$

$+$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$

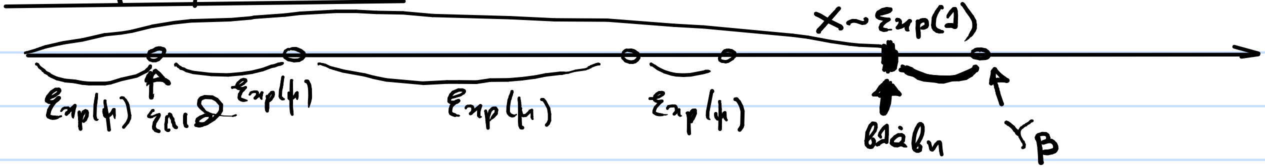
Άρα:

$$E[Y_a] = (1-e^{-\lambda\tau})\,\tau \cdot \frac{1}{(1-e^{-\lambda\tau})^2} = \frac{\tau}{1-e^{-\lambda\tau}} \overset{\tau=1/\mu}{=} \frac{1/\mu}{1-e^{-\lambda/\mu}}$$

Λόγω αμνήμονης

$\downarrow$

Σενάριο β (Poisson):



$$E[Y_\beta] = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}.$$

Σύγκριση:

$$E[Y_\alpha] = \frac{\frac{1}{\mu}}{1-e^{-\lambda/\mu}} \quad , \quad E[Y_\beta] = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}.$$

$$E[Y_\beta] - E[Y_\alpha] = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu(1-e^{-\lambda/\mu})} = \frac{\mu(1-e^{-\lambda/\mu}) + \lambda(\cancel{1}-e^{-\lambda/\mu}) - \cancel{\lambda}}{\lambda\mu(1-e^{-\lambda/\mu})}$$

$$= \frac{\mu - \mu e^{-\lambda/\mu} - \lambda e^{-\lambda/\mu}}{\lambda\mu(1-e^{-\lambda/\mu})} = \frac{1 - e^{-\lambda/\mu} - \frac{\lambda}{\mu} e^{-\lambda/\mu}}{\lambda(1-e^{-\lambda/\mu})}$$

$$\overset{N\sim \text{Poisson}(\lambda/\mu)}{=} \frac{Pr[N \geq 2]}{\lambda(1-e^{-\lambda/\mu})} > 0$$

Άρα οι τακτικές επιθεωρήσεις (σενάριο α) είναι καλύτερο αφού $E[Y\alpha] < E[Y\beta]$.