Διαδικασία Poisson

① Ασκ. 3.11 / φυλ. 1

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson με ρυθμό λ και χρόνους γεγον. $S_1, S_2, \ldots$

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i\right] = ;$$

Λύση:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr[N(t)=n]\, E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i \,\middle|\, N(t)=n\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr[N(t)=n]\, E\left[\sum_{i=1}^{n} S_i \,\middle|\, N(t)=n\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr[N(t)=n] \sum_{i=1}^{n} \underbrace{E[S_i \mid N(t)=n]}_{E[U_{i:n}]}$$

Θ. Campbell

$(S_1, S_2, \ldots, S_n \mid N(t)=n)$

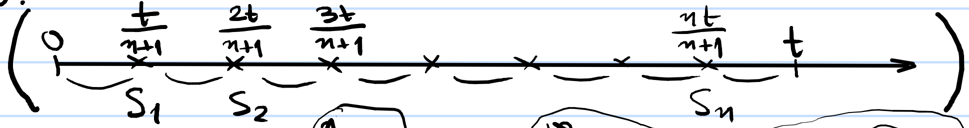
$= (U_{1:n}, U_{2:n}, \ldots, U_{n:n})$

διατ. τ.μ. από η $U([0,t])$

Άρα: $E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i\right] = \sum_{n=0}^{\infty} Pr[N(t)=n] \sum_{i=1}^{n} E[U_{i:n}]$

Δυο τρόποι να συνεχίσω:

1ος: $E[U_{i:n}] = \dfrac{it}{n+1}$



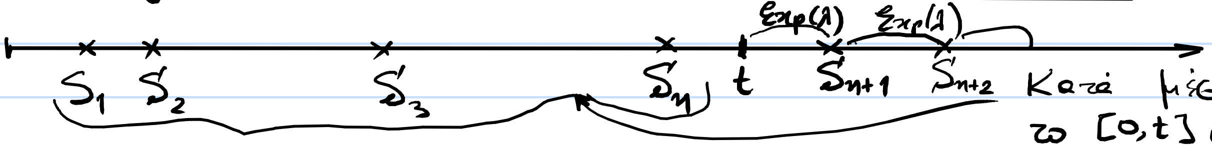
Άρα $E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i\right] = \sum_{n=0}^{\infty} Pr[N(t)=n] \cdot \sum_{i=1}^{n} \dfrac{it}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} Pr[N(t)=n] \dfrac{t}{\cancel{n+1}} \dfrac{n\cancel{(n+1)}}{2}$

$$= \frac{t}{2} \underbrace{E[N(t)]}_{\lambda t} = \frac{\lambda t^2}{2}$$

2ος: $\sum_{i=1}^{n} U_{i:n}$ = Άθροισμα ΟΛΩΝ των διατεταγμ. $= \sum_{i=1}^{n} U_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} E[U_{i:n}] = \sum_{i=1}^{n} E[U_i] = n\dfrac{t}{2}$

Άρα $E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i\right] = \sum_{n=0}^{\infty} Pr[N(t)=n] \cdot \dfrac{nt}{2} = E[N(t)]\dfrac{t}{2} = \dfrac{\lambda t^2}{2}.$

② Υπολογισμός $E[S_i \mid N(t)=n]$ σε σ.δ. Poisson



Κατά μέσο όρο χωρίζουν το $[0,t]$ σε $n+1$ ίσα διαστ.

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson, $S_1, S_2, \ldots$ χρόνοι γεγον. Ρυθμός: λ.

Θ. Campbell: $i \le n$: $E[S_i \mid N(t)=n] = \dfrac{i\,t}{n+1}$

$i > n$: $E[S_i \mid N(t)=n] = t + (i-n)\cdot\dfrac{1}{\lambda}$.

③ Ασκ. 3.14 / φυλ. 1

$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson με ρυθμό λ. Γεγονός $\to$ Τύπου 1 με πιθ p. / $\to$ Τύπου 2 με πιθ $1-p$ } Ανεξ. από άλλα γεγ.

$\{N_i(t)\}$ σ.δ. γεγον. τύπου i, $i=1,2$

T_i το πρώτο γεγονός της $\{N_i(t)\}$, $i=1,2$.

$$F_{T_1,T_2}(t_1,t_2) = Pr[T_1 \le t_1, T_2 \le t_2] = Pr[T_1 \le t_1]\,Pr[T_2 \le t_2] = (1-e^{-\lambda p t_1})(1-e^{-\lambda(1-p)t_2})$$

④ <u>Ασκ. 3.15 / Φυλ. 1</u>

Σύστημα υποκείμενο σε k είδη διαταραχών

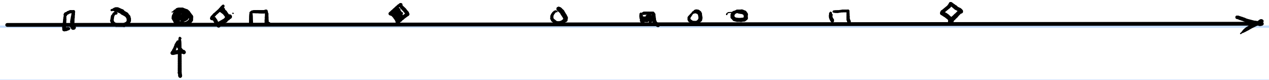
Διαταραχές τύπου i σύμφωνα με σ.δ. Poisson με ρυθμό λ_i, $i=1,2,\ldots,k$ <u>Ανεξ</u>

Διαταραχή τύπου i $\longrightarrow$ Βλάβη με πιθ. p_i

T: Χρόνος ζωής συστήματος (χρόνος ως τη βλάβη)

S: Είδος διαταρ. που προκάλεσε τη βλάβη

$Pr[T>t,\ S=i] =$;



T, $S=0$

□ : διατ. 1
○ : -"- 2
◇ : -"- 3
■ : βλάβη λόγ. 1
● : -"- 2
◆ : -"- 3
-"- k

$\{N_i(t)\}$ σ.δ. διαταρ. τύπου i $\longrightarrow$ Poisson με ρυθμό λ_i

$\{M_i(t)\}$ σ.δ. διαταρ. τύπου i που προκαλούν βλάβη $\rightarrow$ Poisson $\lambda_i p_i$

$\{M(t)\}$ σ.δ. διαταρ. που προκαλούν βλάβη: Υπέρθεση των $\{M_i(t)\}$ $\rightarrow$ Poisson$\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i\right)$

$$Pr[\underset{\uparrow}{T>t},\ S=i] = Pr[T>t]\,\underbrace{Pr[S=i]} = e^{-\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i \cdot t} \cdot \frac{\lambda_i p_i}{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i} .$$

Χρόνος 1ου γεγ. της $\{M(t)\}$ Τύπος 1ου γεγ. της $\{M(t)\}$

5 Άσκ. 3.16/Φυλ. 1

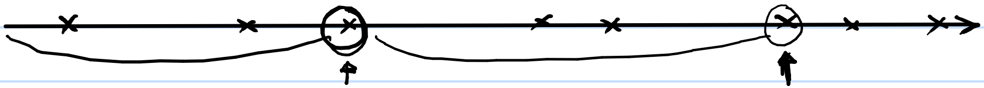
$\{N(t)\}$ σ.δ. Poisson με ρυθμό λ.

Κάθε γεγονός της $\{N(t)\}$ καταγρ. ως τύπου 1 με πιθ. $1/3$

$\{N_1(t)\}$ σ.δ. γεγονότων τύπου 1.

Τα γεγονότα 3º, 6º, 9º, 12º κ.λ.π. της $\{N(t)\}$ καταγρ. στην $\{N_2(t)\}$

$\{N_2(t)\}$ καταγρ. 1 γεγονός κάθε 3 γεγ. της $\{N(t)\}$.



×: Γεγονός της $\{N(t)\}$

$\{N_1(t)\}$ καταγρ. 1 στα 3 με τυχαίο τρόπο

$\{N_2(t)\}$ καταγρ. 1 στα 3 με τακτικό τρόπο

1. Είναι η $\{N_2(t)\}$ σ.δ. Poisson;

   Όχι. Οι ενδιάμεσοι χρόνοι της είναι Erlang$(3,\lambda)$ (ως αθρ. 3 ανεξ. Exp(λ))

2. $\Pr[N_1(t)=3 \mid N_2(t)=1] = \Pr[N_1(t)=3 \mid N(t)=3 \text{ ή } 4 \text{ ή } 5]$

$$= \frac{\Pr[N_1(t)=3 \;\&\; N(t)=3 \text{ ή } 4 \text{ ή } 5]}{\Pr[N(t)=3 \text{ ή } 4 \text{ ή } 5]} = \frac{\Pr[N_1(t)=3, N(t)=3]+\Pr[N_1(t)=3, N(t)=4]+\Pr[N_1(t)=3, \overset{N(t)=5}{\_\_\_}]}{\Pr[N(t)=3]+\Pr[N(t)=4]+\Pr[N(t)=5]}$$

$$= \frac{\Pr[N_1(t)=3,\ N(t)=3] + \Pr[N_1(t)=3,\ N(t)=4] + \Pr[N_1(t)=3,\ N(t)=5]}{\Pr[N(t)=3] + \Pr[N(t)=4] + \Pr[N(t)=5]}$$

$$= \frac{\cancel{e^{-\frac{\lambda t}{3}}}\,\frac{\left(\frac{\lambda t}{3}\right)^3}{3!}\cdot \cancel{e^{-\frac{2\lambda t}{3}}} + \cancel{e^{-\frac{\lambda t}{3}}}\,\frac{\left(\frac{\lambda t}{3}\right)^3}{3!}\,\cancel{e^{-\frac{2\lambda t}{3}}}\cdot\frac{\left(\frac{2\lambda t}{3}\right)^1}{1!} + \cancel{e^{-\frac{\lambda t}{3}}}\,\frac{\left(\frac{\lambda t}{3}\right)^3}{3!}\cdot\cancel{e^{-\frac{2\lambda t}{3}}}\,\frac{\left(\frac{2\lambda t}{3}\right)^2}{2!}}{\cancel{e^{-\lambda t}}\,\frac{(\lambda t)^3}{3!} + \cancel{e^{-\lambda t}}\,\frac{(\lambda t)^4}{4!} + \cancel{e^{-\lambda t}}\,\frac{(\lambda t)^5}{5!}}$$

ανεξ.

$$\left(\text{Διότι} \quad \Pr[N_1(t)=k,\ N(t)=n] = \Pr[\overline{N_1(t)=k},\ \overline{N(t)-N_1(t)=n-k}] = e^{-\frac{\lambda}{3}t}\,\frac{\left(\frac{\lambda t}{3}\right)^k}{k!}\cdot e^{-\frac{2\lambda}{3}t}\,\frac{\left(\frac{2\lambda t}{3}\right)^{n-k}}{(n-k)!} \right)$$

$$= \frac{(\lambda t/3)^3}{3!}\cdot\frac{1+\frac{2\lambda t}{3}+\frac{4\lambda^2t^2}{18}}{\frac{(\lambda t)^3}{3!}\left(1+\frac{\lambda t}{4}+\frac{\lambda^2t^2}{20}\right)}.$$

⑥ Ασκ. 3.2 / Φυλ. 2

Νοσοκομείο : Παθολ. περιστ. ~ Poisson με ρυθμό 10/ώρα
Χειρουργ. περιστ. ~ —″— 20/ώρα } ανεξ.

1. Pr[Περιστ. εναλλάξ: Παθ, Χειρ., Παθ, Χειρ, ... | 40 περιστατικά]

$$= \frac{10}{30}\cdot\frac{20}{30}\cdot\frac{10}{30}\cdot\frac{20}{30}\cdot\ldots\cdot\frac{10}{30}\cdot\frac{20}{30} = \left(\frac{1}{3}\right)^{20}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{20}.$$

2. Pr[5 παθολ και 15 χειρουργ σε 30′ πρώτα | 25 παθολ. και 35 χειρ. συνολικά]

$$= Pr[N_\pi(1/2)=5,\ N_x(1/2)=15 \mid N_\pi(1)=25,\ N_x(1)=35]$$

$$= \frac{Pr[N_\pi(1/2)=5,\ N_x(1/2)=15,\ N_\pi(1)=25,\ N_x(1)=35]}{Pr[N_\pi(1)=25,\ N_x(1)=35]}$$

$$= \frac{Pr[N_\pi(1/2)=5,\ N_\pi(1)=25]\cdot Pr[N_x(1/2)=15,\ N_x(1)=35]}{Pr[N_\pi(1)=25]\cdot Pr[N_x(1)=35]}$$

$$= \frac{Pr[N_\pi(1/2)=5,\ N_\pi(1)-N_\pi(1/2)=20]\cdot Pr[N_x(1/2)=15,\ N_x(1)-N_x(1/2)=20]}{Pr[N_\pi(1)=25]\cdot Pr[N_x(1)=35]}$$

$$= \frac{\cancel{e^{-5}}\cdot\frac{5^5}{5!}\,\cancel{e^{-5}}\cdot\frac{5^{20}}{20!}\cdot\cancel{e^{-10}}\,\frac{10^{15}}{15!}\cdot\cancel{e^{-10}}\,\frac{10^{20}}{20!}}{\cancel{e^{-10}}\cdot\frac{10^{25}}{25!}\,\cancel{e^{-20}}\cdot\frac{20^{35}}{35!}} = \binom{25}{5}\binom{35}{15}\cdot\frac{5^{25}\,10^{35}}{10^{25}\,20^{35}}.$$

3. Pr[40 περιστ. σε 1 ώρα εκ των οποίων τα 20 χειρ]
$= Pr[N(1) = 40, N_x(1) = 20] = Pr[N_\pi(1) = 20, N_x(1) = 20] = \ldots$

4. Συνδιακ (Χειρουργ και Ολικών σε 1 ώρα)
$= Cov[N_x(1), N(1)] = Cov[N_x(1), N_x(1) + N_\pi(1)]$
$= Cov[N_x(1), N_x(1)] + \cancel{Cov[N_x(1), N_\pi(1)]} \to 0 = Var[N_x(1)]$
$= 20 \cdot 1.$

5. Μέσος αριθμός παθολ. μέχρι το 50ο χειρουργικό.

$$= E[N_\pi(S_{50}^x)] = E[E[N_\pi(S_{50}^x) \mid S_{50}^x]].$$

S_{50}^x: χρόνος 50ου χειρ.

Όμως: $E[N_\pi(S_{50}^x) \mid S_{50}^x = x] = E[N_\pi(x)] = 10x$

Άρα $E[N_\pi(S_{50}^x)] = E[10 S_{50}^x] = 10 E[S_{50}^x] = 10 \cdot 50 \cdot \frac{1}{\lambda_x}$

$$= 10 \cdot 50 \cdot \frac{1}{20} = \frac{500}{20} = 25.$$