Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα με Κόστη – Ανανεωτική Θεωρία

① Ασκ. 4.5 / Φυλ. 2 (Θέμα 3 – Ιούνιος 2019)

- Μηχανή με ανεξ. ισον. κύκλους λειτουργίας $O_1, O_2, \ldots$

$$f_O(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda t} + \frac{1}{2}\lambda^2 t e^{-\lambda t}, & t>0 \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases} \qquad O_i = \begin{cases} \text{Exp}(\lambda), & \text{με πιθ. } \frac{1}{2} \\ \text{Erlang}(2,\lambda), & \text{με πιθ. } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- Τέλος κύκλου λειτ $\Rightarrow$ Ακαριαία επαναλειτουργία
- Κόστη λειτουργίας: a / κύκλος λειτουργίας

  b / –//– που υπερβαίνει σε διαρκ. τις t_0 χρονικές μονάδες

  c / χρονική μονάδα

- Μακροπροθ. μέσος ρυθμός κόστους = ;

Λύση:

$C(t)$: Κόστος στο $(0,t]$

$S_n = O_1 + O_2 + \dots + O_n$: Στιγμή περάτωσης του n-οστού κύκλου λειτουργίας

C_n = Κόστος στον n-οστό κύκλο $= C(S_n) - C(S_{n-1})$

$C_n = a + b \cdot 1_{\{O_n > t_0\}} + c \cdot O_n$

$\{(O_n, C_n) : n \geq 1\}$ ανεξ. ισον. διότι $\{O_n : n \geq 1\}$ ανεξ. και ισον.

ΣΑΘΚ εφαρμόσιμο:

Μακροπρ. μέσος ρυθμός κόστους $= \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{E[C(t)]}{t} = \dfrac{E[C_1]}{E[O_1]} = \dfrac{a + b \cdot e^{-\lambda t_0}\left(1 + \frac{\lambda t_0}{2}\right) + c \cdot \frac{3}{2\lambda}}{\frac{3}{2\lambda}}$.

$E[O_1] = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\lambda}}_{E[Exp(\lambda)]} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{2}{\lambda}}_{E[Erlang(2,\lambda)]} = \frac{3}{2\lambda}$.

$E[C_1] = a + b \Pr[O_1 > t_0] + c\, E[O_1]$

Όμως

$\Pr[O_1 > t_0] = \int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda t} + \frac{1}{2}\lambda^2 t e^{-\lambda t}\right) dt = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} \lambda^2 t e^{-\lambda t} dt$

$= \frac{1}{2} e^{-\lambda t_0} + \frac{1}{2}\left(e^{-\lambda t_0} + e^{-\lambda t_0}\frac{(\lambda t_0)^1}{1!}\right)$

Σημείωση:

$$\Pr[\underbrace{Erlang(n,\lambda)}_{} > x] = \Pr[\underbrace{N(x)}_{} \le n-1] = \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^i}{i!}$$

S_n: Χρόνος n-οστού γεγονότος μιας σ.δ. Poisson με ρυθμό λ

γεγον. στην σ.δ. Poisson με ρυθμό λ

Εδώ:

$$\Pr[Erlang(2,\lambda) > t_0] = e^{-\lambda t_0}\frac{(\lambda t_0)^0}{0!} + e^{-\lambda t_0}\frac{(\lambda t_0)^1}{1!} = e^{-\lambda t_0} + e^{-\lambda t_0}\lambda t_0$$

② Ασκ. 4.6 /φυλ. 2 (Θέμα 3 - Ιούνιος 2018)

- Μηχανή επεξεργασίας προϊόντων σε κύκλους
- Στην αρχή κύκλου: Άφιξη παρτίδας προϊόντων προς επεξεργασία

  Συνάρτηση πιθανότητας μεγέθους παρτίδας $P(x) = \begin{cases} 1/2, & x=2 \\ 1/3, & x=3 \\ 1/6, & x=4. \end{cases}$

- Μετά: Επεξεργ. προϊόντων παρτίδας ένα-ένα.

  Ανεξ. χρόνοι επεξεργ. Μέσος χρ. επεξ = 2 χρον. μον.

  Τέλος επεξ. προϊόντος → Αναχώρηση άμεσα

- Δομή κέρδους /κόστους: Κέρδος 10 €/προϊόν

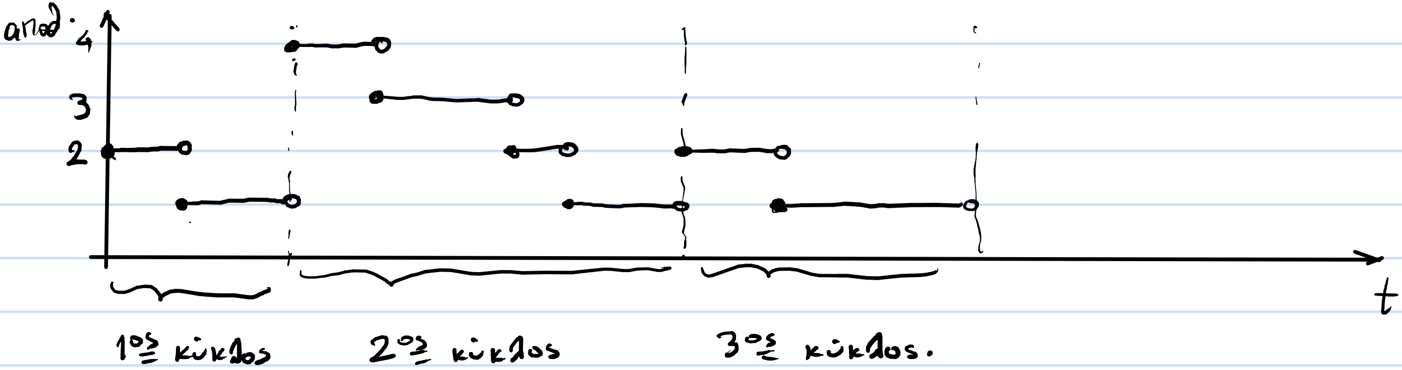
  Κόστος αποθ. 1€/προϊόν & χρον. μονάδα

  (πληρώνεται όσο το προϊόν είναι παρόν είτε επεξεργ. είτε όχι)

Ερωτήματα:

1. Μέση διάρκεια κύκλου λειτ.
2. Μακροπρ. μέσος ρυθμός κέρδους
3. Αν χρειάζεται ρύθμιση μετά από έναν κύκλο λειτ. με πιθ. 1/3, με χρόνο ρύθμισης 3 χρονικές μονάδες, κόστος 6 €/ρύθμιση → Ξανά τα 1, 2.

Λύση:



Διάρκεια & κέρδος κύκλου προσδιορίζεται από μέγεθος παρτίδας κύκλου και χρόνους επεξ. προϊόντων κύκλου $\rightarrow$ $\{$(Διάρκεια κύκλου n, κέρδος κυκλ. n): $n \geq 1\}$: ανεξ., ισον.

$\Downarrow$

ΣΑΘΚ εφαρμόσιμο

$$\text{Μακροπρ. ρυθμός κέρδους} = \frac{E[\text{Κέρδος κύκλου}]}{E[\text{Διάρκεια κύκλου}]}$$

1. $E[\text{Διάρκεια κύκλου}] = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 4\right)}_{\text{Μέσο μέγεθος παρτίδας}} \cdot \underbrace{2}_{\text{Μέσος χρόνος επεξ. προϊόντος}} = 16/3.$

2. $E[\text{Κέρδος κύκλου}] = \frac{1}{2}(2\cdot 10 - 2\cdot 2 - 1\cdot 2)$

$+\frac{1}{3}(3\cdot 10 - 3\cdot 2 - 2\cdot 2 - 1\cdot 2)$

$+\frac{1}{6}(4\cdot 10 - 4\cdot 2 - 3\cdot 2 - 2\cdot 2 - 1\cdot 2)$

$= 8/3\cdot 10 - 2\left(\frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{1}{3}\cdot 6 + \frac{1}{6}\cdot 10\right)$

$= 80/3 - 3 - \frac{12}{3} - \frac{10}{3} = \frac{49}{3}$

$\text{Μακρ. ρυθμός κέρδους} = \frac{49}{16}.$

3. $E[\text{Διάρκεια κύκλου με ρύθμιση}] = \frac{1}{3}\cdot 3 + \frac{2}{3}\cdot 0 + \frac{16}{3} = \frac{19}{3}$

$E[\text{Κέρδος κύκλου με ρύθμιση}] = \frac{49}{3} - \frac{1}{3}\cdot 6 - \frac{2}{3}\cdot 0 = 43/3$

$\text{Μακρ. ρυθμός κέρδους με ρύθμιση} = \frac{43}{19}$

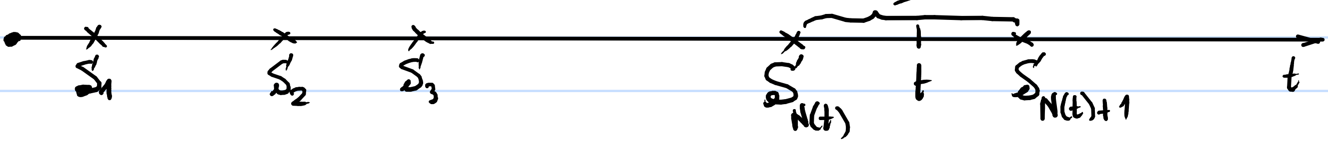
③ Άσκ. 2.11 / φυλ. 2 (Θέμα 2 – Σεπτ. 2018)

$X_1, X_2, \dots \geq 0$ ανεξ. ισον με συνεχή σ.κ. $F_X(x)$ και $E[X_1^k]=\mu_k<\infty$.

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $N(t) = \#$ γεγον. στο $(0,t]$

χρόνος n-οστού γεγον.

$X(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$: t- εξαρτ χρόνος $X(t)$

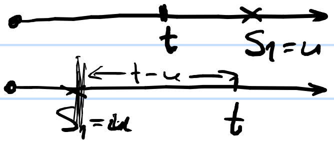


Αναν. εξισ. για την $h(t) = E[(X(t))^3]$, λύση , $\lim_{t\to\infty} E[(X(t))^3]$

Λύση:

$$h(t) = E[(X(t))^3] = \int_0^\infty E[(X(t))^3 \mid S_1 = u]\, dF_X(u).$$

$$E[(X(t))^3 \mid S_1 = u] = \begin{cases} u^3, & u>t \\ \underbrace{E[(X(t-u))^3]}_{h(t-u)} & u\leq t \end{cases}$$



Άρα

$$h(t) = \underbrace{\int_t^\infty u^3 \, dF_X(u)}_{d(t)} + \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u)$$: Αναν. εξίσωση για την $h(t)$

$\Rightarrow$

$$h(t) = d(t) + (d * m_X)(t)$$

$$= \underbrace{\int_t^\infty u^3 \, dF_X(u)}_{d(t)} + \int_0^t \underbrace{\int_{t-u}^\infty x^3 \, dF_X(x)}_{d(t-u)} \, dm_X(u)$$: Λύση αναν. εξισ. για την $h(t)$.

Για την οριακή λύση χρειάζεται το ΒΑΘ.

$$d(t) = d_1(t) - d_2(t) = \underbrace{\int_t^\infty u^3 \, dF_X(u)}_{} - \underset{\sim}{0}$$

$\left(\int_t^\infty u^3 dF_X(u) \leq \int_0^\infty u^3 dF_X(u) = \mu_3 < \infty \right)$ $\rightarrow$ φραγμ., φθιν, ≥ 0 ✓

$$\int_0^\infty |d(t)| \, dt = \int_0^\infty d(t)\, dt = \int_0^\infty \int_t^\infty u^3 dF_X(u)\, dt \overset{0 \leq t \leq u}{=} \int_0^\infty u^3 \int_0^u dt \, dF_X(u)$$

$$= \int_0^\infty u^4 dF_X(u) = \mu_4 < \infty. \; ✓$$

Ισχύουν οι προϋπ. του ΒΑΘ

Apa

$$\lim_{t \to \infty} h(t) = \frac{\int_0^\infty d(t)\,dt}{E[X]} = \frac{\mu_4}{\mu_1}.$$