Επιχειρησιακή Έρευνα: Στοχαστικά Μοντέλα

Φυλλάδιο Ασκήσεων 1 (βασικών), έκδοση 1/3/2018

Αντώνης Οικονόμου

1

Υπενθυμίσεις από τις Πιθανότητες

1. Ένας φοιτητής έχει n βιβλία, αριθμημένα ως $1, 2, \ldots, n$. Το βιβλίο k έχει ακριβώς i τυπογραφικά λάθη με πιθανότητα $k^i/(k+1)^{i+1}$, όπου $i = 0, 1, 2, \ldots$ και $k = 1, 2, \ldots, n$. Ο φοιτητής διαλέγει ένα βιβλίο στην τύχη (ομοιόμορφα) και το διαβάζει. Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά του αριθμού των τυπογραφικών λαθών που θα βρει.

2. Μια κάλπη περιέχει a λευκά και b μαύρα σφαιρίδια. Αφού τραβήξουμε ένα σφαιρίδιο, το επανατοποθετούμε στην κάλπη αν είναι λευκό. Αν, όμως, είναι μαύρο, τότε βάζουμε στη θέση του ένα λευκό (από κάποια άλλη κάλπη). Έστω X_n ο αριθμός των λευκών σφαιριδίων στην κάλπη, αφού η διαδικασία έχει επαναληφθεί n φορές.
   1. Αποδείξτε ότι
   $$E[X_{n+1}] = \left(1 - \frac{1}{a+b}\right) E[X_n] + 1.$$
   2. Βρείτε έναν 'κλειστό' τύπο για την $E[X_n]$.

3. Κάθε φορά που ρίπτεται ένα νόμισμα, προσγειώνεται ως 'κεφαλή' με πιθανότητα p και ως 'γράμματα' με πιθανότητα $1-p$. Να υπολογιστεί ο μέσος αριθμός ρίψεων μέχρι να παρατηρηθεί μια σειρά από r συνεχόμενες κεφαλές.

4. Έστω X μια μη-αρνητική ακέραια τυχαία μεταβλητή με πιθανογεννήτρια
   $$P_X(z) = \frac{c}{6 - z - z^2}.$$
   1. Να προσδιοριστεί η σταθερά c.
   2. Να υπολογιστεί η μέση τιμή $E[X]$.
   3. Να υπολογιστεί η συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x) = P(X = x)$, $x = 0, 1, 2, \ldots$.
   4. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X$ είναι άρτιος$)$.

5. Έστω X, Y και Z ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με ρυθμούς λ, λ και μ αντίστοιχα, με $\lambda \neq \mu$. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes της $X + Y + Z$ και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς της.

6. Ένα σύστημα έχει δυο εξαρτήματα και χαλάει μόλις κάποιο από τα εξαρτήματα χαλάσει. Ο χρόνος ζωής του πρώτου εξαρτήματος ακολουθεί την εκθετική κατανομή $Exp(\lambda)$ (δηλαδή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_1(t) = \lambda e^{-\lambda t},\ t \geq 0$), ενώ ο χρόνος ζωής του δεύτερου εξαρτήματος ακολουθεί την κατανομή $Gamma(n, \mu)$ (δηλαδή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_2(t) = \mu^n t^{n-1} e^{-\mu t}/(n-1)!,\ t \geq 0$). Υποθέτοντας ότι οι χρόνοι ζωής των εξαρτημάτων είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, να βρεθεί ο μέσος χρόνος ζωής του συστήματος των δυο εξαρτημάτων.

2

Ανανεωτικές διαδικασίες

1. Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $\mathrm{Exp}(\lambda)$, δηλαδή, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

   Να υπολογιστούν η συνάρτηση κατανομής του χρόνου του k-οστού γεγονότος, $F_{S_k}(t)$, η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των γεγονότων τη στιγμή t, $(p_k(t) : k \geq 0)$, και η ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$. Να υπολογιστούν, επίσης, οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί Laplace - Stieltjes $\tilde{F}_{S_k}(s)$, $(\tilde{p}_k(s) : k \geq 0)$ και $\tilde{m}(s)$.

2. Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $\mathrm{Erlang}(r, \lambda)$, δηλαδή, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(t) = \frac{\lambda^r}{(r-1)!} t^{r-1} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0,$$

   και συνάρτηση κατανομής

$$F_X(t) = 1 - \sum_{j=0}^{r-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}, \quad t \geq 0.$$

   Να υπολογιστούν η συνάρτηση κατανομής του χρόνου του k-οστού γεγονότος, $F_{S_k}(t)$ και η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των γεγονότων τη στιγμή t, $(p_k(t) : k \geq 0)$. Να αποδειχθεί ότι η ανανεωτική συνάρτηση δίνεται από τον τύπο

$$m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 1 - \sum_{j=0}^{kr-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \right\}, \quad t \geq 0.$$

   Να υπολογιστούν, επίσης, οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί Laplace - Stieltjes $\tilde{F}_{S_k}(s)$, $(\tilde{p}_k(s) : k \geq 0)$ και $\tilde{m}(s)$.

3. Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων Hyperexp$(p, 1-p, \lambda, \mu)$, δηλαδή, μίξη δυο κατανομών $\mathrm{Exp}(\lambda)$ και $\mathrm{Exp}(\mu)$, με πιθανότητες p και $1-p$ αντίστοιχα. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των ενδιάμεσων χρόνων είναι, επομένως,

$$f_X(t) = p\lambda e^{-\lambda t} + (1-p)\mu e^{-\mu t}, \quad t \geq 0,$$

και η συνάρτηση κατανομής είναι

$$F_X(t) = p(1-e^{-\lambda t}) + (1-p)(1-e^{-\mu t}), \quad t \geq 0.$$

Να υπολογιστούν οι μετασχηματισμοί Laplace - Stieltjes $\tilde{F}_{S_k}(s)$, $(\tilde{p}_k(s) : k \geq 0)$ και $\tilde{m}(s)$, της συνάρτησης κατανομής του χρόνου του k-οστού γεγονότος, $F_{S_k}(t)$, της συνάρτησης πιθανότητας του αριθμού των γεγονότων τη στιγμή t, $(p_k(t) : k \geq 0)$ και της ανανεωτικής συνάρτησης $m(t)$, αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι η ανανεωτική συνάρτηση είναι της μορφής

$$m(t) = A + Bt + Ce^{-(\lambda(1-p)+\mu p)t}, \quad t \geq 0,$$

και να υπολογιστούν οι σταθερές A, B και C.

4. Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$, όπου ένας ενδιάμεσος χρόνος ανανέωσης είναι 0 με πιθανότητα p, και έχει την $\text{Exp}(\lambda)$ κατανομή με πιθανότητα $1-p$. Δηλαδή, η συνάρτηση κατανομής του είναι μικτή, με μάζα πιθανότητας p στο 0 και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $(1-p)\lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$. Η συνάρτηση κατανομής του είναι

$$F_X(t) = p + (1-p)(1-e^{-\lambda t}), \quad t \geq 0.$$

Να υπολογιστούν οι μετασχηματισμοί Laplace - Stieltjes $\tilde{F}_{S_k}(s)$, $(\tilde{p}_k(s) : k \geq 0)$ και $\tilde{m}(s)$, της συνάρτησης κατανομής του χρόνου του k-οστού γεγονότος, $F_{S_k}(t)$, της συνάρτησης πιθανότητας του αριθμού των γεγονότων τη στιγμή t, $(p_k(t) : k \geq 0)$ και της ανανεωτικής συνάρτησης $m(t)$, αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι η ανανεωτική συνάρτηση είναι της μορφής

$$m(t) = A + Bt, \quad t \geq 0,$$

και να υπολογιστούν οι σταθερές A και B.

5. Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $\text{Uniform}([0,1])$, δηλαδή, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(t) = 1,\ 0 \leq t \leq 1.$$

Να αποδειχθεί ότι για την ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$ ισχύει

$$m(t) = e^t - 1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

6. Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_X(t)$, με μέση τιμή μ και έστω $h(t) = E[S_{N(t)+1}]$, $t \geq 0$. Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$ και, λύνοντάς την, να αποδειχθεί ότι

$$h(t) = \mu(1 + m(t)), \quad t \geq 0,$$

όπου $m(t)$ η ανανεωτική συνάρτηση.

7. Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_X(t)$ και έστω $h(t) = E[N(t)(N(t)-1)]$, $t \geq 0$. Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$ και, λύνοντάς την, να αποδειχθεί ότι
$$h(t) = 2(m * m)(t), \quad t \geq 0,$$
όπου $m(t)$ η ανανεωτική συνάρτηση.

8. Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_X(t)$ και έστω $h(t) = \Pr[N(t) \text{ περιττός}]$, $t \geq 0$. Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$ και να λυθεί. Να βρεθεί το όριο $\lim_{t\to\infty} h(t)$.

9. Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$, με χρόνους γεγονότων $S_1, S_2, \ldots$, με συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_X(t)$ και ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$. Έστω $R(t) = S_{N(t)+1} - t$ ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης τη στιγμή t. Θεωρούμε κάποιο σταθερό $x \geq 0$ και έστω $h(t) = \Pr[R(t) > x]$, $t \geq 0$. Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$ και, λύνοντάς την, να αποδειχθεί ότι
$$h(t) = \Pr[R(t) > x] = 1 - F_X(x+t) + \int_0^t (1 - F_X(x+t-u))dm(u), \quad t, x \geq 0.$$
Να αποδειχθεί, επίσης, ότι
$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} \Pr[R(t) > x] = \frac{\int_x^\infty (1 - F_X(u))du}{\mu}, \quad x \geq 0.$$
Έστω $A(t) = t - S_{N(t)}$ ο παρελθών χρόνος ανανέωσης τη στιγμή t. Δικαιολογήστε την ισότητα ενδεχομένων $\{A(t) > x\} = \{R(t-x) > x\}$ και, χρησιμοποιώντας την, βρείτε το $\lim_{t\to\infty} \Pr[A(t) > x]$. Ομοίως, δείξτε ότι
$$\lim_{t\to\infty} \Pr[A(t) > x, R(t) > y] = \frac{\int_{x+y}^\infty (1 - F_X(u))du}{\mu}, \quad x, y \geq 0.$$

10. Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$, με συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_X(t)$ με μέση τιμή $\mu \in (0, \infty)$ και διασπορά $\sigma^2 \in [0, \infty)$. Έστω, επίσης, $m(t)$ η ανανεωτική συνάρτηση και $h(t) = m(t) - \frac{t}{\mu}$, $t \geq 0$. Να αποδειχθεί ότι η $h(t)$ ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση
$$h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u) = d(t) + (h * F_X)(t), \quad t \geq 0,$$
με
$$\begin{aligned} d(t) &= \int_0^t \left(1 - \frac{u}{\mu}\right) dF_X(u) - \int_t^\infty \frac{t}{\mu} dF_X(u) \\ &= \frac{1}{\mu} \int_t^\infty (1 - F_X(u))du - (1 - F_X(t)). \end{aligned}$$

Επίσης, αποδείξτε ότι

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} \left(m(t) - \frac{t}{\mu} \right) = \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2},$$

δηλαδή η ευθεία $\frac{1}{\mu}t + \frac{\sigma^2-\mu^2}{2\mu^2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $m(t)$.

3

Διαδικασία Poisson

1. Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Να υπολογιστεί η μέση τιμή
$$E[N(t)(N(t)-1)(N(t)-2)\cdots(N(t)-k+1)].$$

2. Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Να υπολογιστεί η συνδιακύμανση
$$Cov[N(t), N(s)].$$

3. Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(N(t)$ είναι περιττός$)$, $t \geq 0$.

4. Υποθέτουμε ότι πελάτες φθάνουν σε μια τράπεζα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 8 πελάτες την ώρα. Να υπολογιστούν τα ακόλουθα:
   1. Η μέση τιμή και η διασπορά του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα μέσα σε ένα οκτάωρο λειτουργίας της τράπεζας.
   2. Η πιθανότητα κανείς πελάτης να μη μπει στην τράπεζα τα τελευταία 15 λεπτά μιας εργάσιμης μέρας.
   3. Η συνδιακύμανση του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα μεταξύ 9.00 και 11.00 και του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα την ίδια μέρα μεταξύ 10.00 και 11.00.
   4. Η συνδιακύμανση του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα μεταξύ 9.00 και 11.00 και του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα την επόμενη μέρα μεταξύ 10.00 και 11.00.

5. Θεωρούμε $\{N_1(t) : t \geq 0\}$ και $\{N_2(t) : t \geq 0\}$ δυο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Έστω A_i να είναι ο αριθμός των γεγονότων στη διαδικασία $\{N_i(t)\}$ πριν το πρώτο γεγονός στην άλλη διαδικασία, $i = 1, 2$.
   1. Να υπολογιστούν οι συναρτήσεις πιθανότητας των A_i, $i = 1, 2$.
   2. Να εξεταστεί αν οι A_1 και A_2 είναι ανεξάρτητες.

6. Έστω μια διαδικασία Poisson(λ), $0 < s < t$ και n μη αρνητικός ακέραιος. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $\Pr[N(s) = k|N(t) = n]$, $0 \leq k \leq n$. Τι κατανομή είναι η δεσμευμένη κατανομή της $N(s)$ δεδομένου του ότι $N(t) = n$; Μπορείτε να ερμηνεύσετε διαισθητικά το αποτέλεσμα;

7. Έστω δυο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson, $\{N_1(t)\}$ και $\{N_2(t)\}$, με ρυθμούς λ_1 και λ_2, αντίστοιχα. Έστω, επίσης $\{N(t)\}$ η υπέρθεσή τους. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $\Pr[N_1(t) = k|N(t) = n]$, $0 \leq k \leq n$. Τι κατανομή είναι η δεσμευμένη κατανομή της $N_1(t)$ δεδομένου του ότι $N(t) = n$; Μπορείτε να ερμηνεύσετε διαισθητικά το αποτέλεσμα;

8. Έστω $\{N(t)\}$ μια διαδικασία Poisson(λ) και X μια τυχαία μεταβλητή, ανεξάρτητη της $\{N(t)\}$, με κατανομή Exp(μ). Έστω N το πλήθος των γεγονότων της $\{N(t)\}$ στο (τυχαίο) διάστημα $[0, X]$. Να υπολογιστεί η συνάρτηση πιθανότητας της N. Τί κατανομή είναι;

9. Έστω $\{N(t)\}$ μια διαδικασία Poisson(λ) και $S_1, S_2, \ldots$ οι χρόνοι των γεγονότων της. Να υπολογιστεί ο μέσος χρόνος του τελευταίου γεγονότος πριν τη στιγμή t, δηλαδή η $E[S_{N(t)}]$.

10. Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και S_1 ο χρόνος του πρώτου γεγονότος της. Να υπολογιστεί η δεσμευμένη μέση τιμή $E[S_1|N(t) \geq 1]$.

11. Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και $S_1, S_2, \ldots$ οι χρόνοι των γεγονότων της. Να υπολογιστεί ως συνάρτηση του λ και του t, η μέση τιμή
$$E[\sum_{i=1}^{N(t)} S_i].$$

12. Θεωρούμε ότι πελάτες φθάνουν σε ένα σύστημα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Κάθε πελάτης μενει στο σύστημα για εκθετικό χρόνο με παράμετρο μ και κατόπιν αναχωρεί. Οι εκθετικοί χρόνοι παραμονής των πελατών θεωρούνται ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Αποδείξτε ότι ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα τη στιγμή t είναι $\frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})$.

13. Έστω ότι ένα μηχάνημα έχει εκθετικό χρόνο ζωής με παράμετρο λ και ότι μπορεί να επιθεωρείται κατά μέσο όρο κάθε $\tau = \frac{1}{\mu}$ χρονικές μονάδες,
    1. είτε στις στιγμές $0, \tau, 2\tau, 3\tau, \ldots$ μιας ντετερμινιστικής διαδικασίας επιθεωρήσεων,
    2. είτε στις στιγμές μιας Poisson διαδικασίας επιθεωρήσεων με ρυθμό μ.

    Έστω Y_α και Y_β ο χρόνος στον οποίο θα ανακαλυφθεί ότι το μηχάνημα είναι χαλασμένο με τις διαδικασίες (α) και (β) αντίστοιχα, δηλαδή οι στιγμές των πρώτων επιθεωρήσεων μετά το πέρας του χρονου ζωής του μηχανήματος. Να υπολογιστούν οι $E[Y_\alpha]$ και $E[Y_\beta]$. Ποιά διαδικασία επιθεωρήσεων είναι προτιμότερη;

14. Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Κάθε γεγονός της $\{N(t)\}$ καταγράφεται ως τυπου 1 με πιθανότητα p και ως τύπου 2 με πιθανότητα $1-p$, ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα γεγονότα. Έστω $\{N_1(t)\}$ η απαριθμήτρια διαδικασία των γεγονότων τύπου 1 και $\{N_2(t)\}$ η απαριθμήτρια διαδικασία των γεγονότων τύπου 2. Έστω, επίσης, T_1 και T_2 οι χρόνοι πρώτων γεγονότων στις $\{N_1(t)\}$ και $\{N_2(t)\}$ αντίστοιχα. Να υπολογιστεί η από κοινού συνάρτηση κατανομής των T_1, T_2, δηλαδή η συνάρτηση
$$F_{T_1,T_2}(t_1,t_2) = P(T_1 \leq t_1, T_2 \leq t_2).$$

15. Ένα σύστημα υπόκειται σε k διαφορετικά είδη ηλεκτρικών διαταραχών (shocks). Οι ηλεκτρικές διαταραχές των διαφόρων τύπων συμβαίνουν ανεξάρτητα και μάλιστα οι ηλεκτρικές διαταραχές τύπου i συμβαίνουν συμφωνα με μια Poisson διαδικασία με ρυθμό λ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Μια ηλεκτρική διαταραχή τύπου i προκαλεί βλάβη στο σύστημα με πιθανότητα p_i, ανεξάρτητα από οτιδήποτε άλλο. Έστω T ο χρόνος ζωής του συστήματος (δηλαδή ο χρόνος μέχρι να πάθει βλάβη από κάποια ηλεκτρική διαταραχή) και S το είδος της ηλεκτρικής διαταραχής που προκάλεσε τη βλάβη. Να υπολογιστεί η πιθανότητα
$$P(T > t, S = i).$$

16. Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Κάθε γεγονός της $\{N(t)\}$ καταγράφεται με πιθανότητα $1/3$ ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα γεγονότα στη διαδικασία $\{N_1(t)\}$. Από την άλλη μεριά θεωρούμε τη διαδικασία $\{N_2(t)\}$ που καταγράφει μόνο τα k-οστά γεγονότα της $\{N(t)\}$, όπου το k είναι πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή το 3ο, το 6ο, το 9ο κλπ. γεγονός. Επομένως και η $\{N_2(t)\}$ καταγράφει με πιθανότητα $1/3$ αλλά όχι ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα γεγονότα.
    1. Είναι η $\{N_2(t)\}$ διαδικασία Poisson;
    2. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(N_1(t) = 3 | N_2(t) = 1)$.

17. Έστω $\{N(t)\}$ μη-ομογενής διαδικασία Poisson με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t)$, $t \geq 0$. Να υπολογιστεί η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής του χρόνου S_1 του πρώτου γεγονότος δεδομένου ότι $N(t) = 1$, δηλαδή η συνάρτηση $P(S_1 \leq x | N(t) = 1)$, $x \geq 0$.

18. Έστω $\{N(t)\}$ μη-ομογενής διαδικασία Poisson με συνάρτηση ρυθμού $\lambda(t) = \lambda t$, $t \geq 0$ (γραμμική συνάρτηση ρυθμού). Έστω S_1 ο χρόνος του πρώτου γεγονότος. Να υπολογιστεί η $E[N(t)]$ και η $E[S_1]$.

19. Έστω $\{N(t)\}$ μη-ομογενής διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda(t) = \lambda$ για $t \in [0,1] \cup [2,3] \cup [4,5] \cup \ldots$ και $\lambda(t) = 0$ για $t \in (1,2) \cup (3,4) \cup (5,6) \cup \ldots$. Έστω S_1 ο χρόνος του πρώτου γεγονότος.
    1. Να υπολογιστεί η κατανομή του S_1, $P(S_1 \leq x)$, $x \geq 0$.
    2. Να υπολογιστεί η κατανομή της $N(t)$, $t \geq 0$.

3. Να υπολογιστεί η δεσμευμένη μέση τιμή $E[S_1|N(t)=n]$ για $0 \leq t \leq 2$.

20. Έστω $\{N(t)\}$ διαδικασία Poisson ρυθμού λ και $Z_1, Z_2, \ldots$ ανεξάρτητες ισόνομες ακέραιες μη-αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση πιθανότητας $p_j = P(Z_n = j)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, πιθανογεννήτρια $P_Z(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j$, μέση τιμή $E[Z_n] = \mu_Z$ και διασπορά $Var[Z_n] = \sigma_Z^2$, $n = 1, 2, \ldots$. Θέτουμε $\{Z(t)\}$ με $Z(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Z_n$, $t \geq 0$ να είναι η αντίστοιχη σύνθετη διαδικασία Poisson.
    1. Να υπολογιστούν η $E[Z(t)]$ και η $Var[Z(t)]$ (συναρτήσει των λ, μ_Z και σ_Z).
    2. Να υπολογιστεί η πιθανογεννήτρια $P_{Z(t)}(z)$ της $Z(t)$.
    3. Να αποδείξετε ότι οι πιθανότητες $r_k(t) = P(Z(t) = k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ δίνονται από το αναδρομικό σχήμα

$$r_0 = e^{-\lambda t(1-p_0)},$$
$$r_k = \frac{\lambda t}{k} \sum_{j=0}^{k-1} (k-j) p_{k-j} r_j, \ k \geq 1.$$

21. Έστω $\{N(t)\}$ διαδικασία Poisson ρυθμού λ και $Z_1, Z_2, \ldots$ ανεξάρτητες ισόνομες ακέραιες μη-αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση πιθανότητας $P(Z_n = j) = (1-a)^{j-1} a$, $j = 1, 2, \ldots$ (γεωμετρική κατανομή). Θέτουμε $\{Z(t)\}$ με $Z(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} Z_n$, $t \geq 0$ να είναι η αντίστοιχη σύνθετη διαδικασία Poisson. Να αποδείξετε ότι

$$P(Z(t) = k) = \sum_{r=1}^{k} \binom{k-1}{r-1} a^r (1-a)^{k-r} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^r}{r!}.$$

4

Ανανεωτικές διαδικασίες με κόστη

1. Σε μια στάση λεωφορείων φθάνουν επιβάτες σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Η εταιρεία που εξυπηρετεί τη συγκεκριμένη στάση έχει δυο τύπους λεωφορείων, απλά και φυσούνες, που περνούν εναλλάξ από τη στάση. Ο χρόνος από την αναχώρηση απλού λεωφορείου μέχρι την άφιξη φυσούνας είναι x χρονικές μονάδες, ενώ ο χρόνος από την αναχώρηση φυσούνας μέχρι την άφιξη απλού λεωφορείου είναι y χρονικές μονάδες. Το κόστος ανά επίσκεψη στη στάση απλού λεωφορείου είναι K_1 και το κόστος ανά επίσκεψη φυσούνας είναι K_2. Το κόστος αναμονής ενός πελάτη ανά χρονική μονάδα είναι h. Να βρεθεί ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους και να βρεθούν οι τιμές των x και y που τον ελαχιστοποιούν.

2. Πελάτες φθάνουν σε ένα κατάστημα, σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson(λ), και ζητάνε ένα συγκεκριμένο προϊόν. Το αρχικό απόθεμα του προϊόντος στο κατάστημα είναι S. Κάθε πελάτης που φθάνει στο κατάστημα ικανοποιείται άμεσα αν υπάρχει απόθεμα προϊόντος, αλλιώς χάνεται. Μόλις το απόθεμα του καταστήματος εξαντληθεί, το κατάστημα παραγγέλνει S μονάδες προϊόντος από τον προμηθευτή του, οι οποίες του παραδίδονται μετά από τυχαίο χρόνο με μέση τιμή L. Υποθέτουμε ότι το κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα προϊόντος και χρονική μονάδα στο κατάστημα είναι h. Το κόστος αγοράς ενός προϊόντος από το κατάστημα είναι c και η τιμή πώλησης είναι p. Το κόστος διεκπεραίωσης μας παραγγελίας είναι d ανεξάρτητα από το μέγεθός της. Να υπολογιστεί ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κέρδους του καταστήματος.

3. Μια εταιρεία προσφέρει συμβόλαια μακράς διαρκείας στους πελάτες της για ένα συγκεκριμένο προϊόν που εμπορεύεται. Συγκεκριμένα, σε κάθε πελάτη της με συμβόλαιο μακράς διαρκείας προσφέρει την ακόλουθη πολιτική εγγύησης: Αντικαθιστά το προϊόν δωρεάν οσεσδήποτε φορές χαλάσει μέσα σε χρονικό διάστημα g από την αγορά του. Αν το προϊόν χαλάσει μετά από χρόνο g από την αγορά του, τότε ο πελάτης πρέπει να αγοράσει ένα νέο προϊόν με την ίδια πολιτική εγγύησης. Έστω ότι οι χρόνοι ζωής του προϊόντος είναι Exp(λ) και ότι c είναι η τιμή αγοράς ενός προϊόντος (όταν δεν αντικαθίσταται δωρεάν). Έστω επίσης d ($d < c$) το κόστος κατασκευής ενός προϊόντος για την εταιρεία. Να υπολογιστεί ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους για έναν πελάτη της εταιρείας ο οποίος έχει συμβόλαιο μακράς διαρκείας με αυτήν, καθώς και ο μακροπρόθεσμος ρυθμός κέρδους από τον πελάτη αυτό για την εταιρεία.

4. Έστω μια αποθήκη που εξετάζεται στην αρχή κάθε χρονικής περιόδου ως προς το απόθεμα ενός προϊόντος. Έστω X_n η στάθμη του αποθέματος στην αρχή της χρονικής περιόδου n και $X_1 = S > 0$ (S γνωστός αριθμός). Συμβολίζουμε με Y_n τη ζήτηση του προϊόντος τη χρονική περίοδο n. Υποθέτουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $Y_1, Y_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με κατανομή $F_Y(x)$. Μόλις το απόθεμα πέσει κάτω από s (s γνωστός αριθμός με $s < S$) τότε αναπληρώνεται αμέσως σε ύψος S. Αποδείξτε ότι
$$\lim_{n\to\infty} \Pr[X_n \geq x] = \frac{1 + m_Y(S-x)}{1 + m_Y(S-s)}, \quad s \leq x \leq S,$$
όπου $m_Y(x)$ η ανανεωτική συνάρτηση ανανεωτικής διαδικασίας με ενδιάμεσους χρόνους τις $Y_1, Y_2, \ldots$.

5. Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης στο οποίο οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson(λ) και το οποίο έχει έναν υπάλληλο. Κάθε πελάτης που βρίσκει τον υπάλληλο ελεύθερο αρχίζει να εξυπηρετείται και ο χρόνος εξυπηρέτησής του έχει κατανομή $F_X(x)$. Κάθε πελάτης που βρίσκει τον υπάλληλο απασχολημένο αναχωρεί άμεσα από το σύστημα και χάνεται για πάντα. Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό των χαμένων πελατών.

6. Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης στο οποίο οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_A(x)$ και το οποίο έχει έναν υπάλληλο. Κάθε πελάτης που βρίσκει τον υπάλληλο ελεύθερο αρχίζει να εξυπηρετείται και ο χρόνος εξυπηρέτησής του είναι Exp(μ). Κάθε πελάτης που βρίσκει τον υπάλληλο απασχολημένο αναχωρεί άμεσα από το σύστημα και χάνεται για πάντα. Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό των χαμένων πελατών.

7. Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με χρόνους γεγονότων S_n και ενδιάμεσους χρόνους γεγονότων X_n. Έστω, επίσης, $\{C_n\}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με (X_n, C_n), $n \geq 1$, ανεξάρτητες και ισόνομες με συνάρτηση κατανομης $F_{X,C}(x,y)$. Το C_n είναι το ονομαστικό κόστος που συσσωρεύεται στον n-οστό ανανεωτικό κύκλο και πληρώνεται στο τέλος του. Υποθέτουμε ότι τα κόστη αποπληθωρίζονται με έναν συνεχή αποπληθωριστή $\alpha > 0$. Έστω TC το συνολικό αποπληθωρισμένο κόστος στον άπειρο χρονικό ορίζοντα, δηλαδή
$$TC = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha S_n} C_n.$$
Να αποδείξετε ότι
$$E[TC] = \frac{E[Ce^{-\alpha X}]}{1 - E[e^{-\alpha X}]}.$$

5

Ουρές αναμονής

1. Θεωρήστε μια $M/M/c$ ουρά με ρυθμό αφίξεων 5 πελάτες την ώρα και μέσο χρόνο εξυπηρέτησης ανά πελάτη 78 λεπτά.
    1. Ποιός είναι ο ελάχιστος αριθμός υπηρετών c που χρειάζεται για να είναι το σύστημα ευσταθές (δηλαδή να μην απειρίζεται η ουρά);
    2. Ποιός είναι ο ελάχιστος αριθμός υπηρετών που χρειάζεται αν η εργατική νομοθεσία επιβάλλει κάθε υπηρέτης να είναι απασχολημένος το πολύ το 80% του χρόνου του;

2. Να βρείτε τις οριακές κατανομές (p_n), (a_n) και (d_n) των αριθμών των πελατών σε συνεχή χρόνο, σε στιγμές αφίξεων και σε στιγμές αναχωρήσεων, αντίστοιχα, σε μια ευσταθή $M/M/1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ, χρησιμοποιώντας το νόμο του Little και την ιδιότητα PASTA. Για το σκοπό αυτό θεωρήστε ως 'σύστημα' την i θέση του συστήματος εξυπηρέτησης για $i = 1, 2, \ldots$.

3. Βρείτε τον οριακό μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα, $E[Q]$ στην GI/GI/∞ ουρά με μέσο ενδιάμεσο χρόνο αφίξεων a και μέσο χρόνο εξυπηρέτησης b.

4. Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπηρέτη, στο οποίο καταφθάνουν πελάτες δύο τύπων 1 και 2, σύμφωνα με δυο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Κάθε πελάτης, ανεξαρτήτως τύπου έχει $Exp(\mu)$ χρόνο εξυπηρέτησης. Οι πελάτες τύπου 1 έχουν απόλυτη προτεραιότητα έναντι των πελατών τύπου 2, δηλαδή όταν υπάρχουν πελάτες τύπου 1 στο σύστημα ο υπηρέτης εξυπηρετεί αυτούς και αρχίζει να εξυπηρετεί πελάτες τύπου 2 μόνο όταν δεν υπάρχουν πελάτες τύπου 1. Επιπλέον, αν ένας πελάτης τύπου 2 εξυπηρετείται και αφιχθεί πελάτης τύπου 1, ο υπηρέτης διακόπτει την εξυπηρέτηση και πηγαίνει να εξυπηρετήσει τον νεοαφιχθέντα πελάτη τύπου 1. Να βρεθούν οι μέσοι οριακοί αριθμοί πελατών τύπων 1 και 2, $E[Q_1]$ και $E[Q_2]$, αντίστοιχα.

5. Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης το οποίο διαθέτει έναν υπηρέτη και άπειρη χωρητικότητα. Η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson με παράμετρο λ, ενώ οι χρόνοι εξυπηρέτησης έχουν την κατανομή $\mathrm{Exp}(\mu)$. Κάθε φορά που το σύστημα αδειάζει ο υπηρέτης απενεργοποιείται. Με την άφιξη ενός πελάτη σε κενό σύστημα, ο υπηρέτης μπαίνει σε διαδικασία ενεργοποίησης. Ο χρόνος που χρειάζεται να ενεργοποιηθεί (οπότε και θα αρχίσει να παρέχει κανονικά εξυπηρέτηση) ακολουθει

την κατανομή $\mathrm{Exp}(\theta)$. Κατά τη διάρκεια του χρόνου αυτού οι αφίξεις συνεχίζονται κανονικά. Το σύστημα αυτό αναφέρεται ως η M/M/1 ουρά με εκθετικούς χρόνους εκκίνησης. Βρείτε τον οριακό μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα, $E[Q]$, και το μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη σε αυτό, $E[S]$, χρησιμοποιώντας την ανάλυση μέσης τιμής.

6. Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης το οποίο διαθέτει έναν υπηρέτη και άπειρη χωρητικότητα. Η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson με ρυθμό λ, ενώ οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν την κατανομή $\mathrm{Exp}(\mu)$. Ο υπηρέτης εναλλάσεται μεταξύ περιόδων λειτουργίας και αργίας. Οι χρόνοι λειτουργίας έχουν την κατανομή $\mathrm{Exp}(\zeta)$, ενώ οι χρόνοι αργίας την κατανομή $\mathrm{Exp}(\theta)$. Οι αφίξεις στο σύστημα γίνονται κανονικά, ανεξάρτητα αν ο υπηρέτης είναι σε περίοδο λειτουργίας ή αργίας. Όμως, εξυπηρέτηση παρέχεται μόνο όταν ο υπηρέτης βρίσκεται σε περίοδο λειτουργίας. Το σύστημα αυτό αναφέρεται ως η M/M/1 ουρά με εναλλασσόμενες εκθετικές περιόδους λειτουργίας και αργίας. Βρείτε τον οριακό μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα, $E[Q]$, και το μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη σε αυτό, $E[S]$, χρησιμοποιώντας την ανάλυση μέσης τιμής.

7. Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης το οποίο διαθέτει έναν υπηρέτη και μηδενικό χώρο αναμονής. Οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ, ενώς οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών είναι $\mathrm{Exp}(\mu)$. Ένας πελάτης που κατά την άφιξή του βρίσκει τον υπηρέτη ελεύθερο αρχίζει άμεσα να εξυπηρετείται. Αν, όμως, βρει τον υπηρέτη κατειλημένο, τότε αναχωρεί από το σύστημα και προσπαθεί αργότερα μέχρι τελικά να εξυπηρετηθεί. Οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών επαναπροσπαθειών ενός πελάτη έχουν την κατανομή $\mathrm{Exp}(\gamma)$.Το σύστημα αυτό αναφέρεται ως η M/M/1/1 ουρά με εκθετικές επαναπροσπάθειες. Βρείτε τον οριακό μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα, $E[Q]$, και το μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη σε αυτό, $E[S]$, χρησιμοποιώντας την ανάλυση μέσης τιμής.

8. Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/1$ ουράς με ρυθμό αφίξεων λ και $Exp(\mu)$ χρόνους εξυπηρέτησης, όπου ο χρόνος υπομονής κάθε πελάτη που περιμένει στο χώρο αναμονής έχει την κατανομή $\mathrm{Exp}(\nu)$ και μόλις αυτός συμπληρωθεί ο πελάτης αναχωρεί. Για την ειδική περίπτωση $\nu = \mu$, βρείτε τη στάσιμη κατανομή του αριθμού των πελατών σε συνεχή χρόνο.

9. Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/1$ ουράς με ρυθμό αφίξεων λ και $\mathrm{Exp}(\mu)$ χρόνους εξυπηρέτησης, με αποθαρρυνόμενους πελάτες, όπου κάθε πελάτης που βρίσκει n πελάτες κατά την άφιξή του αναχωρεί με πιθανότητα q_n, με $q_0 = \frac{1}{4}$ και $q_n = \frac{3}{4}$ για $n \geq 1$. Να βρεθούν
   1. η συνθήκη ευστάθειας (στασιμότητας) για το σύστημα
   2. η κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών σε συνεχή χρόνο.

10. Θεωρούμε την $M/M/c$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και $\mathrm{Exp}(\mu)$ χρόνους εξυπηρέτησης. Να βρεθούν
    1. η συνθήκη ευστάθειας (στασιμότητας) για το σύστημα

2. η κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών σε συνεχή χρόνο.

11. Θεωρούμε την $M/M/\infty$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και $\mathrm{Exp}(\mu)$ χρόνους εξυπηρέτησης. Να βρεθούν
    1. η συνθήκη ευστάθειας (στασιμότητας) για το σύστημα
    2. η κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών σε συνεχή χρόνο.

12. Θεωρούμε την τροποποίηση της M/M/c/c ουράς με Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ και $\mathrm{Exp}(\mu)$ χρόνους εξυπηρέτησης, όπου ορισμένοι πελάτες αναχωρούν από το σύστημα αμέσως μόλις αφιχθούν, χωρίς να εξυπηρετηθούν (αποθαρρυνόμενοι πελάτες). Συγκεκριμένα, κάθε πελάτης που βρίσκει n άλλα άτομα στο σύστημα κατά την άφιξή του αναχωρεί με πιθανότητα $\frac{n}{c}$, $0 \leq n \leq c$.
    1. Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών στο σύστημα $\{Q(t)\}$. Τί είδους κατανομή είναι;
    2. Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο ποσοστό των άμεσα αποχωρούντων πελατών (χαμένων πελατών).
    3. Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα, $E[S]$, λαμβάνοντας υπόψη όλους τους αφιχθέντες πελάτες. Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτης στο σύστημα, $E[S']$, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τους τελικά εισερχόμενους πελάτες.
    4. Να βρεθεί ο μέσος κύκλος απασχόλησης του συστήματος, $E[Z]$.