# Επιχειρησιακή Έρευνα: Στοχαστικά Μοντέλα

Φυλλάδιο Ασκήσεων 2 (επιπλέον), έκδοση 16/3/2021

Αντώνης Οικονόμου

# 1

# Υπενθυμίσεις από τις Πιθανότητες

1. Σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι, ο παίκτης έχει την ευκαιρία να ανοίξει έναν από 3 φακέλους που του παρουσιάζονται. Ο πρώτος από αυτούς περιέχει 3 ευρώ, τα οποία παίρνει και αποχωρεί από το παιχνίδι. Ο δεύτερος έχει 5 ευρώ και του δίνει το δικαίωμα να επαναλάβει τη διαδικασία (πάλι με 3 φακέλους όπως οι αρχικοί). Ο τρίτος έχει 7 ευρώ και του δίνει το δικαίωμα να επαναλάβει τη διαδικασία (πάλι με 3 φακέλους όπως οι αρχικοί). Αν ο παίκτης δεν γνωρίζει σε κάθε επανάληψη της διαδικασίας το περιεχόμενο των φακέλων και διαλέγει στην τύχη, τότε ποιό είναι το αναμενόμενο συνολικό κέρδος του;

2. Μια κάλπη έχει $n$ κόκκινα και $m$ πράσινα σφαιρίδια. Επιλέγεται στην τύχη ένα κάθε φορά και αφαιρείται από την κάλπη μέχρι που να μείνουν μόνο σφαιρίδια ενός χρώματος. Έστω $T_{n,m}$ ο αριθμός των σφαιριδίων που έχουν μείνει στο τέλος αυτής της διαδικασίας. Διατυπώστε ένα αναδρομικό σχήμα υπολογισμού για τη "διπλή ακολουθία" $\mu_{n,m} = E[T_{n,m}]$ και χρησιμοποιήστε το για να βρείτε το $\mu_{3,4}$.

3. Επιλέγουμε ένα νόμισμα, εκτελούμε $n$ ανεξάρτητες ρίψεις του και έστω $X$ ο αριθμός των ρίψεων στις οποίες θα εμφανιστούν "Γράμματα". Αν η πιθανότητα να φέρνει "Γράμματα" το νόμισμα είναι τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$, να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας της $X$ και η μέση τιμή της.

4. Θεωρούμε ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $p$ και πιθανότητα αποτυχίας $1-p$ σε κάθε δοκιμή. Έστω $N$ η δοκιμή στην οποία εμφανίζεται η πρώτη επιτυχία. Να υπολογιστούν οι $E[N]$ και $Var[N]$.

5. Μια κάλπη περιέχει αρχικά $r$ κόκκινα και $g$ πράσινα σφαιρίδια και αρχίζει να εκτελείται η εξής διαδικασία. Σε κάθε βήμα προστίθενται $j$ κόκκινα σφαιρίδια στην κάλπη και κατόπιν αποσύρονται $j$ σφαιρίδια από αυτήν (οπότε στο τέλος κάθε βήματος υπάρχουν πάντα $r+g$ συνολικά σφαιρίδια). Βρείτε το μέσο αριθμό κόκκινων σφαιριδίων στην κάλπη μετά από $n$ βήματα της διαδικασίας.

6. Έστω $X$ μια μη-αρνητική ακέραια τυχαία μεταβλητή με πιθανογεννήτρια

$$P_X(z) = \frac{c-5z}{2z^2-12z+16}.$$

   1. Να προσδιοριστεί η σταθερά $c$.
   2. Να υπολογιστεί η μέση τιμή $E[X]$.

3. Να υπολογιστεί η συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x) = P(X = x)$, $x = 0, 1, 2, \ldots$.

7. Έστω $X$ μια μη-αρνητική ακέραια τυχαία μεταβλητή με πιθανογεννήτρια

$$P_X(z) = \frac{cz^2 - 31z + 36}{6(2-z)^2(3-z)}.$$

1. Να προσδιοριστεί η σταθερά $c$.
2. Να υπολογιστεί η μέση τιμή $E[X]$.
3. Να υπολογιστεί η συνάρτηση πιθανότητας $f_X(x) = P(X = x)$, $x = 0, 1, 2, \ldots$.

8. Έστω $X$ μια μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή με μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes

$$\tilde{F}_X(s) = \frac{10s + c}{3s^2 + 30s + 75}.$$

1. Να προσδιοριστεί η σταθερά $c$.
2. Να υπολογιστεί η μέση τιμή $E[X]$.
3. Να υπολογιστεί η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ της $X$.

9. Έστω $X, Y$ μη-αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με μετασχηματισμούς Laplace-Stieltjes

$$\tilde{F}_X(s) = e^{-2s}, \quad \tilde{F}_X(s) = \frac{4e^{-2s} + 6e^{-6s}}{10}.$$

Να υπολογιστούν οι συναρτήσεις κατανομής $F_X(x)$ και $F_Y(x)$.

10. Έστω $X$ μια μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή με μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes

$$\tilde{F}_X(s) = \frac{1}{3}e^{-2s} + \frac{c}{3s + 15}.$$

1. Να προσδιοριστεί η σταθερά $c$.
2. Να υπολογιστεί η μέση τιμή $E[X]$.
3. Να υπολογιστεί η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ της $X$.

# 2

# Ανανεωτικές διαδικασίες

1. Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των ενδιάμεσων χρόνων
$$f_X(t) = p\lambda e^{-\lambda t} + (1-p)\lambda^2 t e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0,$$
όπου $p \in (0,1)$ και $\lambda > 0$. Να υπολογιστούν οι μετασχηματισμοί Laplace - Stieltjes $\tilde{F}_{S_k}(s)$, $(\tilde{p}_k(s) : k \geq 0)$ και $\tilde{m}(s)$, της συνάρτησης κατανομής του χρόνου του $k$-οστού γεγονότος, $F_{S_k}(t)$, της συνάρτησης πιθανότητας του αριθμού των γεγονότων τη στιγμή $t$, $(p_k(t) : k \geq 0)$ και της ανανεωτικής συνάρτησης $m(t)$, αντίστοιχα. Να βρεθεί τύπος για την ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$.

2. Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$, όπου η συνάρτηση κατανομής των ενδιάμεσων χρόνων είναι
$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda(t-2)}, & \text{αν } t \geq 2, \\ 0, & \text{αν } 0 \leq t < 2, \end{cases}$$
όπου $\lambda > 0$. Να υπολογιστούν οι μετασχηματισμοί Laplace - Stieltjes $\tilde{F}_{S_k}(s)$, $(\tilde{p}_k(s) : k \geq 0)$ και $\tilde{m}(s)$, της συνάρτησης κατανομής του χρόνου του $k$-οστού γεγονότος, $F_{S_k}(t)$, της συνάρτησης πιθανότητας του αριθμού των γεγονότων τη στιγμή $t$, $(p_k(t) : k \geq 0)$ και της ανανεωτικής συνάρτησης $m(t)$, αντίστοιχα. Να βρεθεί τύπος για την ανανεωτική συνάρτηση $m(t)$.

3. (Θέμα 3 - Σεπτέμβριος 2020) Βρείτε την πιθανότητα $p_n(t) = \Pr[M(t) = n]$ για την ανανεωτική διαδικασία $\{M(t)\}$ με ενδιάμεσους χρόνους που έχουν την κατανομή Erlang(3,$\lambda$), δηλ. συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^3}{2} x^2 e^{-\lambda x}, & \text{αν } x \geq 0, \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

4. (Θέμα 2α - Ιούνιος 2020) Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων ανανέωσης $F_X(t)$. Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $h(t) = E[N(t)(N(t)+1)]$.

5. (Θέμα 2β - Ιούνιος 2020) Δίνεται η ανανεωτική εξίσωση
$$h(t) = (1 - e^{-\mu t}) + \int_0^t h(t-u)dF_X(u),$$
όπου $F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes $\tilde{h}(s)$ της λύσης $h(t)$.

6. (Θέμα 2 - Ιούνιος 2018) Θεωρούμε μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με ενδιάμεσους χρόνους γεγονότων $X_1, X_2, \ldots$ με κατανομή $F_X(x)$ και χρόνους γεγονότων $S_1, S_2, \ldots$. Δοθείσης μιας χρονικής στιγμής $t$, $S_{N(t)}$ και $S_{N(t)+1}$ είναι οι χρόνοι του τελευταίου γεγονότος πριν τη στιγμή $t$ (με $S_{N(t)} = 0$ αν $N(t) = 0$) και του πρώτου χρόνου γεγονότος μετά τη χρονική στιγμή $t$, αντίστοιχα. Έστω
$$h(t) = E\left[\frac{S_{N(t)} + S_{N(t)+1}}{2}\right].$$
   1. Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$.
   2. Να βρεθεί η $h(t)$ σε κλειστή μορφή, όταν η $\{N(t)\}$ είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda$.

7. (Θέμα 2 - Σεπτέμβριος 2020) Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων ανανέωσης $F_X(t)$ με πεπερασμένη μέση τιμή $E[X] = a$. Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την πιθανότητα $h(t) = \Pr[N(t)$ είναι πολλαπλάσιο του $3]$ και να βρεθεί το όριο $\lim_{t\to\infty} h(t)$. Να διατυπωθεί σαφώς οποιοδήποτε θεώρημα χρησιμοποιηθεί και να ελεγχθούν οι υποθέσεις του.

8. (Θέμα 3 - Ιούνιος 2020) Δίνεται η ανανεωτική εξίσωση
$$h(t) = \int_t^\infty e^{-\mu u}du + \int_0^t h(t-u)dF_X(u),$$
όπου $F_X(t)$ είναι η συνάρτηση κατανομής μιας συνεχούς μη-αρνητικής τυχαίας μεταβλητής με μέση τιμή $E[X]$. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{t\to\infty} h(t)$, αφού διατυπωθεί το θεώρημα που θα χρησιμοποιηθεί και ελεγχθούν οι συνθήκες εφαρμογής του.

9. (Θέμα 3 - Σεπτέμβριος 2019) Επιβάτες φθάνουν σε μια στάση σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson $\{N(t)\}$ με ρυθμό $\lambda$. Λεωφορείο χωρητικότητας $K$ επισκέπτεται τη στάση τις στιγμές μιας ανανεωτικής διαδικασίας $\{M(t)\}$ με συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $G(t)$. Όσοι επιβάτες χωρούν κατά την άφιξη ενός λεωφορείου επιβιβάζονται και αναχωρούν ενώ οι υπόλοιποι αποχωρούν από τη στάση ψάχνοντας για εναλλακτικό μέσο μεταφοράς (π.χ. ταξί). Έστω $X(t)$ ο αριθμός των πελατών που περιμένουν στη στάση τη χρονική στιγμή $t$ και $p_n(t) = P(X(t) = n)$.
   1. Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $p_n(t)$ και να λυθεί.
   2. Να υπολογιστεί το $\lim_{t\to\infty} p_n(t)$ όταν η $G(t)$ ακολουθεί την κατανομή $Exp(\mu)$.

3. Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό πελατών που αποχωρούν από τη στάση χωρίς να εξυπηρετηθούν από το λεωφορείο.

10. (Θέμα 2 - Ιούνιος 2019) Θεωρούμε μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με συνεχή κατανομή ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ των γεγονότων $F_X(t)$ με πεπερασμένη μέση τιμή $E[X]$.
    1. Να διατυπωθεί και να λυθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την πιθανότητα $h(t) = \Pr[N(t) \text{ άρτιος}]$.
    2. Να βρεθεί το όριο $\lim_{t\to\infty} \Pr[N(t) \text{ άρτιος}]$.
    3. Να βρεθεί η $\Pr[N(t) \text{ άρτιος}]$, $t \geq 0$, σε κλειστή μορφή όταν η $F_X(t)$ είναι η εκθετική κατανομή με παράμετρο $\mu$ (Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το (1) ή την κατανομή της $N(t)$ σε αυτή την ειδική περίπτωση).

11. (Θέμα 2 - Σεπτέμβριος 2018) Έστω $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με συνεχή κατανομή $F_X(x)$ και $E[X_1^k] = \mu_k < \infty$, $k \geq 1$. Έστω $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n = 1, 2, \ldots$ $(S_0 = 0)$ και $N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$, $t \geq 0$ η αντίστοιχη ανανεωτική διαδικασία. Έστω $X(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$ ο $t$-εξαρτώμενος ενδιάμεσος χρόνος τη στιγμή $t$ (δηλαδή ο χρόνος από το αμέσως προηγούμενο γεγονός πριν από τη στιγμή $t$ έως το αμέσως επόμενο γεγονός μετά τη χρονική στιγμή $t$). Να γραφεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $E[(X(t))^3]$, να λυθεί και να υπολογιστεί το $\lim_{t\to\infty} E[(X(t))^3]$.

# 3

## Διαδικασία Poisson

1. (Θέμα 1 - Σεπτέμβριος 2018) Σε ένα σταθμό διοδίων καταφθάνουν φορτηγά και ΙΧ αυτοκίνητα με ρυθμούς 2 και 15 οχημάτων ανά λεπτό αντίστοιχα, σύμφωνα με ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson. Να υπολογιστούν τα ακόλουθα:

    1. Η δεσμευμένη πιθανότητα στα πρώτα 20 λεπτά λειτουργίας του σταθμού να έφθασαν 30 φορτηγά, δεδομένου ότι στα πρώτα 40 λεπτά λειτουργίας του σταθμού έφθασαν 50 φορτηγά και 240 ΙΧ αυτοκίνητα.
    2. Η δεσμευμένη πιθανότητα σε μισή ώρα λειτουργίας να έχουν αφιχθεί 300 ΙΧ αυτοκίνητα, δεδομένου ότι σε αυτή τη μισή ώρα έχουν έρθει συνολικά 360 οχήματα.
    3. Η πιθανότητα το πρώτο φορτηγό να είναι το όγδοο όχημα που αφίχθηκε στο σταθμό.
    4. Οι δεσμευμένοι μέσοι χρόνοι εμφάνισης του 75ου και του 183ου οχήματος, δεδομένου ότι μέσα στην πρώτη μισή ώρα λειτουργίας του σταθμού εμφανίστηκαν 149 οχήματα.

2. (Θέμα 1 - Ιούνιος 2019) Σε ένα νοσοκομείο φθάνουν παθολογικά και χειρουργικά περιστατικά με ρυθμό 10 και 20 την ώρα, αντίστοιχα, σύμφωνα με ανεξάρτητες στοχαστικές διαδικασίες Poisson. Να υπολογιστούν:

    1. Η πιθανότητα σε μια ώρα τα εμφανισθέντα περιστατικά να ήταν εναλλάξ "παθολογικό", "χειρουργικό", "παθολογικό", "χειρουργικό", κλπ. "παθολογικό", "χειρουργικό", αν εμφανίσθηκαν 40 περιστατικά τη συγκεκριμένη ώρα.
    2. Η δεσμευμένα πιθανότητα στα πρώτα 30 λεπτά μιας ώρας να εμφανίσθηκαν 5 παθολογικά και 15 χειρουργικά περιστατικά, δεδομένου ότι κατά τη διάρκεια αυτής της ώρας εμφανίσθηκαν συνολικά 25 παθολογικά και 35 χειρουργικά περιστατικά.
    3. Η πιθανότητα σε μια ώρα να εμφανισθούν 40 περιστατικά, εκ των οποίων τα 20 είναι χειρουργικά.
    4. Η συνδιακύμανση του αριθμού των χειρουργικών περιστατικών και του συνολικού αριθμού περιστατικών που εμφανίζονται σε μια ώρα.
    5. Ο μέσος αριθμός παθολογικών περιστατικών που θα εμφανιστούν μέχρι την εμφάνιση του 50ου χειρουργικού περιστατικού.

3. (Θέμα 1 - Σεπτέμβριος 2020) Σε έναν ιστότοπο ηλεκτρονικού καταστήματος φθάνουν αιτήματα για αγορές κι επισκευές σύμφωνα με ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς 4 και 30 αιτημάτων το λεπτό, αντίστοιχα. Να υπολογισθούν:
   1. η πιθανότητα το πρώτο αίτημα αγοράς να είναι το έκτο αίτημα που έφθασε στον ιστότοπο,
   2. ο δεσμευμένος μέσος χρόνος εμφάνισης του 300ου αιτήματος αγοράς, δεδομένου ότι στην πρώτη ώρα λειτουργίας του ιστότοπου έφθασαν 250 αιτήματα αγορών και 2000 αιτήματα επισκευών.
   3. η δεσμευμένη πιθανότητα στα πρώτα 20 λεπτά λειτουργίας του ιστότοπου να έφθασαν 60 αιτήματα αγορών, δεδομένου ότι στα πρώτα 40 λεπτά λειτουργίας του ιστότοπου έφθασαν 100 αιτήματα αγορών και 480 αιτήματα επισκευών.

4. (Θέμα 1 - Ιούνιος 2020) Σε ένα κατάστημα φθάνουν άνδρες και γυναίκες σύμφωνα με ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς 1 και 6 την ώρα, αντίστοιχα.
   1. Να υπολογιστεί η πιθανότητα να αφιχθούν 5 γυναίκες πριν την άφιξη του πρώτου άνδρα.
   2. Να υπολογιστεί η δεσμευμένη πιθανότητα να έχουν αφιχθεί 7 άτομα την πρώτη μισή ώρα λειτουργίας του καταστήματος, δεδομένου ότι αφίχθησαν συνολικά 20 άτομα την πρώτη ώρα λειτουργίας του καταστήματος.

5. (Θέμα 1 - Σεπτέμβριος 2019) Σε ένα Λούνα-Παρκ φθάνουν ενήλικες και παιδιά με ρυθμούς 5 και 25 ανά ώρα αντίστοιχα, σύμφωνα με ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson. Να υπολογιστούν τα ακόλουθα:
   1. Ο (δεσμευμένος) μέσος αριθμός παιδιών που έφθασαν στην πρώτη ώρα λειτουργίας του Λούνα-Παρκ δεδομένου ότι σε αυτή την ώρα έφθασαν συνολικά 60 άτομα.
   2. Η δεσμευμένη πιθανότητα στην πρώτη ώρα λειτουργίας του Λούνα-Παρκ να έφθασαν 10 ενήλικες, δεδομένου ότι στις δυο πρώτες ώρες λειτουργίας του έφθασαν 15 ενήλικες και 60 παιδιά.
   3. Η πιθανότητα ο πρώτος ενήλικος να είναι ο πέμπτος πελάτης που αφίχθηκε στο Λούνα-Παρκ.
   4. Η δεσμευμένη πιθανότητα σε δυο ώρες λειτουργίας να έχουν αφιχθεί 100 παιδιά, δεδομένου ότι την πρώτη ώρα από αυτές αφίχθησαν 70 παιδιά και 35 ενήλικες.
   5. Οι δεσμευμένοι μέσοι χρόνοι εμφάνισης του 10ου και του 34ου ατόμου, δεδομένου ότι μέσα στην πρώτη ώρα λειτουργίας του Λούνα-Παρκ εμφανίστηκαν 29 άτομα.

6. (Θέμα 1 - Ιούνιος 2018) Θεωρούμε δυο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson $\{N_1(t)\}$ και $\{N_2(t)\}$ με ρυθμούς $\lambda$ και $\mu$ αντίστοιχα. Έστω $\{N(t)\}$ η υπέρθεσή τους.
   1. Να υπολογιστεί η πιθανότητα το 1ο γεγονός της $\{N_1(t)\}$ να είναι το $n$-οστό γεγονός της $\{N(t)\}$.
   2. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $\Pr[N_1(t) = 1|N(t) = n]$.

3. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $\Pr[N(t) = n|N_2(t/2) = n - 1]$.
4. Βρείτε ποιά κατανομή ακολουθεί η $N(t) - N_2(t/2)$.
5. Να υπολογιστεί η συνδιακύμανση $Cov(N_1(t), N(t))$.

# 4

# Ανανεωτικές διαδικασίες με κόστη

1. (Θέμα 3 - Σεπτέμβριος 2018) Σε μια αποθήκη φθάνουν προϊόντα προς συσκευασία σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda$. Μόλις συγκεντρωθούν $Nm$ προϊόντα αρχίζει ένας κύκλος συσκευασίας. Κατά τη διάρκεια ενός κύκλου συσκευασίας, οι αφίξεις νέων προϊόντων σταματούν μέχρι να ολοκληρωθεί η συσκευασία όλων των $Nm$ προϊόντων. Η διαδικασία αυτή έχει ως εξής: Τα προϊόντα συσκευάζονται σε $N$ κουτιά των $m$ προϊόντων το καθένα, μέχρι να συσκευαστούν όλα. Η συσκευασία μιας παρτίδας $m$ προϊόντων σε ένα κουτί διαρκεί $t_p$ χρονικές μονάδες και αμέσως μετά το κουτί αναχωρεί από την αποθήκη για τον προορισμό του. Ακολούθως επιλέγεται η επόμενη παρτίδα $m$ προϊόντων για συσκευασία με χρόνο και πάλι $t_p$ κ.ο.κ. μέχρι που να συσκευαστούν και να αναχωρήσουν όλες οι $N$ παρτίδες. Κατόπιν ξεκινά μια νέα περίοδος υποδοχής εργασιών σύμφωνα με τη διαδικασία Poisson που περιγράψαμε παραπάνω κ.ο.κ. Κάθε χρονική στιγμή υπάρχει κόστος αποθήκευσης $c_p$ ανά προϊόν που βρίσκεται στο σύστημα, που πληρώνεται και για τα προϊόντα που είναι σε διαδικασία συσκευασίας. Επιπλέον υπάρχει κόστος $k_b$ για την συσκευασία ενός κουτιού.

   1. Να βρεθούν τα μακροπρόθεσμα μέσα ποσοστά του χρόνου $f_r$ και $f_p$ που το σύστημα βρίσκεται σε διαδικασία υποδοχής προϊόντων και σε διαδικασία συσκευασίας κουτιών αντίστοιχα.
   2. Να βρεθεί ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους λειτουργίας της αποθήκης.
   3. Ποιό είναι το συνολικό κόστος αποθήκευσης και συσκευασίας που αντιστοιχεί σε ένα κουτί προϊόντων;

2. (Θέμα 2 - Σεπτέμβριος 2019) Μια μηχανή επιθεωρείται τις στιγμές μιας διαδικασίας Poisson $\{N(t)\}$ με ρυθμό $\mu$. Μετά από κάθε επιθεώρηση η μηχανή αντικαθίσταται με καινούργια της οποίας ο χρόνος ζωής είναι εκθετικός με παράμετρο $\nu$. Αν η μηχανή χαλάσει πριν την επόμενη επιθεώρηση τότε αντικαθίσταται με μια εφεδρική μεταχειρισμένη της οποίας ο χρόνος ζωής είναι Erlang$(2,\lambda)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda^2 t e^{-\lambda t} & \text{αν } t \geq 0 \\ 0 & \text{αν } t < 0. \end{cases}$$

   Αν και η εφεδρική χαλάσει, τότε η μηχανή μένει ανενεργή μέχρι την επόμενη επιθεώρηση. Τα κόστη αντικατάστασης της μηχανής είναι $a$ και $b$ αντίστοιχα για καινούργια και μεταχειρισμένη. Επίσης το κόστος της ενέργειας ανά χρονική μονάδα είναι $c_a$ και $c_b$ αντίστοιχα, ανάλογα με το αν λειτουργεί η αρχική (καινούργια) μηχανή ή η εφεδρική. Ενόσω η μηχανή λειτουργεί παράγει προϊόντα με ρυθμό $\xi$ και κάθε προΐόν αποφέρει κέρδος $p$.

1. Να υπολογιστεί το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που η μηχανή λειτουργεί (με την αρχική ή την εφεδρική).
2. Να υπολογιστεί ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κέρδους από τη λειτουργία της μηχανής (κέρδη από προϊόντα μείον κόστη λειτουργίας και αντικατάστασης ανά χρονική μονάδα).

3. (Θέμα 4 - Σεπτέμβριος 2020) Μια μηχανή επεξεργάζεται προϊόντα σε κύκλους λειτουργίας. Κάθε κύκλος λειτουργίας έχει τρεις φάσεις: τη φάση παραγωγής, τη φάση ελέγχου και τη φάση συσκευασίας των προϊόντων. Η πρώτη φάση διαρκεί μέχρι να παραχθούν 10 προϊόντα. Ο χρόνος παραγωγής κάθε προϊόντος είναι εκθετικός με παράμετρο 1/2. Η δεύτερη φάση διαρκεί μέχρι να ελεγχθούν τα 10 προϊόντα που παρήχθησαν στην πρώτη φάση. Ο έλεγχος κάθε προϊόντος διαρκεί μια χρονική μονάδα, στο τέλος της οποίας το αντίστοιχο προϊόν χαρακτηρίζεται άρτιο με πιθανότητα 4/5 ή ελαττωματικό με πιθανότητα 1/5. Στην τρίτη φάση συσκευάζονται μόνο τα άρτια προϊόντα, και ο χρόνος συσκευασίας ανά άρτιο προϊόν είναι μια χρονική μονάδα. Το κέρδος από κάθε άρτιο προϊόν είναι 20 ευρώ, ενώ η ζημία από κάθε ελαττωματικό προϊόν που παράγεται είναι 2 ευρώ. Το κόστος λειτουργίας της μηχανής είναι 2 ευρώ ανά χρονική μονάδα για τις πρώτες δύο φάσεις και 1 ευρώ ανά χρονική μονάδα για την τρίτη φάση. Ποιος είναι ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κέρδους της μηχανής;

4. (Θέμα 4 - Ιούνιος 2020) Μια μηχανή επιθεωρείται στους χρόνους των γεγονότων μιας ανανεωτικής διαδικασίας $\{M(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων $F_X(t) = 1-e^{-\mu t}-\mu t e^{-\mu t}$, $t \geq 0$ (που αντιστοιχεί σε κατανομή Erlang$(2, \mu)$). Στο διάστημα μεταξύ δύο επιθεωρήσεων η μηχανή παράγει προϊόντα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda$. Το κόστος κάθε επιθεώρησης είναι $k$ ευρώ και το κέρδος από κάθε προϊόν είναι $r$ ευρώ. Επίσης υπάρχει κόστος ρεύματος $c$ ευρώ ανά χρονική μονάδα λειτουργίας της μηχανής. Να βρεθεί ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κέρδους ανά χρονική μονάδα, αφού διατυπωθεί το θεώρημα που θα χρησιμοποιηθεί και ελεγχθούν οι συνθήκες εφαρμογής του.

5. (Θέμα 3 - Ιούνιος 2019) Μια μηχανή έχει ανεξάρτητους και ισόνομους κύκλους λειτουργίας $O_1, O_2, \ldots$ που ακολουθούν συνεχή κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda t} + \frac{1}{2}\lambda^2 t e^{-\lambda t} & \text{αν } t \geq 0 \\ 0 & \text{αν } t < 0. \end{cases}$$

Κάθε φορά που τελειώνει ένας κύκλος λειτουργίας της μηχανής, η μηχανή τίθεται ακαριαία σε επαναλειτουργία και αρχίζει ένας νέος κύκλος λειτουργίας. Έστω ότι υπάρχουν τρία είδη κόστους που σχετίζονται με τη λειτουργία της μηχανής.

Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει κόστος $a$ ανά κύκλο λειτουργίας της μηχανής, επιπλέον κόστος $b$ ανά κύκλο λειτουργίας που υπερβαίνει σε διάρκεια τις $t_0$ χρονικές μονάδες και κόστος $c$ ανά χρονική μονάδα λειτουργίας της μηχανής. Να βρεθεί ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους λειτουργίας της μηχανής (δηλ. το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος ανά χρονική μονάδα).

6. (Θέμα 3 - Ιούνιος 2018) Θεωρούμε μια μηχανή επεξεργασίας προϊόντων που λειτουργεί με τον εξής τρόπο: Στην αρχή κάθε κύκλου λειτουργίας της φθάνει μια παρτίδα προϊόντων προς επεξεργασία, η οποία περιέχει 2, 3 ή 4 προϊόντα με πιθανότητες 1/2, 1/3 και 1/6 αντίστοιχα. Κατόπιν τα προϊόντα αυτά επεξεργάζονται από τη μηχανή ένα-ένα. Οι διαδοχικοί χρόνοι επεξεργασίας των προϊόντων είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 2 χρονικές μονάδες. Κάθε προϊόν που διεκπεραιώνεται αναχωρεί άμεσα από το σύστημα. Μόλις ολοκληρωθεί η επεξεργασία όλων των προϊόντων μιας παρτίδας ο αντίστοιχος κύκλος λειτουργίας τελειώνει και αρχίζει ένας νέος με την άφιξη μιας νέας παρτίδας προϊόντων κ.ο.κ. Το σύστημα έχει κέρδος 10 χρηματικών μονάδων για κάθε προϊόν, ενώ σωρρεύει κόστος αποθήκευσης 1 χρηματικής μονάδας ανά προϊόν και χρονική μονάδα.

   1. Να υπολογιστεί η μέση διάρκεια ενός κύκλου λειτουργίας του συστήματος.
   2. Να υπολογιστεί ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κέρδους του συστήματος.
   3. Αν μετά τη διεκπεραίωση όλων των προϊόντων μιας παρτίδας και πριν την αρχή του επόμενου κύκλου λειτουργίας, το σύστημα χρειάζεται ρύθμιση με πιθανότητα 1/3 και κάθε περίοδος ρύθμισης διαρκεί 3 χρονικές μονάδες, να υπολογιστούν η μέση διάρκεια ενός κύκλου λειτουργίας και ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κέρδους του συστήματος. Υποθέστε ότι κάθε ρύθμιση κοστίζει 6 χρηματικές μονάδες και κατά τη διάρκειά της το σύστημα παραμένει κενό, οπότε δεν σωρεύει κόστος αποθήκευσης.

# 5

# Ουρές αναμονής

1. (Θέμα 5 - Ιούνιος 2020) Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/1$ ουράς με ρυθμό αφίξεων $\lambda$, εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο $\mu$, έναν υπηρέτη και απεριόριστο χώρο αναμονής, όπου κάθε πελάτης που βρίσκει το σύστημα κενό εισέρχεται σίγουρα σε αυτό, ενώ κάθε πελάτης που δεν το βρίσκει κενό εισέρχεται με πιθανότητα $p$.
   1. Να βρεθεί η συνθήκη ευστάθειας και η οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα $(p_n)$ σε συνεχή χρόνο.
   2. Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός αφικνούμενου πελάτη στο σύστημα.

2. (Θέμα 5 - Σεπτέμβριος 2020) Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/2$ ουράς με ρυθμό αφίξεων $\lambda$, εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο $\mu$, δύο υπηρέτες και απεριόριστο χώρο αναμονής, όπου κάθε αφικνούμενος πελάτης εισέρχεται σε αυτό με πιθανότητα $1/2$.
   1. Να βρεθεί η συνθήκη ευστάθειας και η οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα $(p_n)$ σε συνεχή χρόνο.
   2. Να βρεθεί ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά ενός εισερχόμενου πελάτη στο σύστημα.

3. (Θέμα 4 - Σεπτέμβριος 2019) Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/1$ ουράς με ρυθμό αφίξεων $\lambda$, εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο $\mu$, έναν υπηρέτη και απεριόριστο χώρο αναμονής, όπου κάθε πελάτης μόλις τελειώσει μια εξυπηρέτησή του επαναλαμβάνει με πιθανότητα $p$ την εξυπηρέτηση (δηλ. ξεκινά άμεσα μια νέα εξυπηρέτηση με εκθετική κατανομή κ.ο.κ., πιθανά και άλλες ισόνομες εξυπηρετήσεις μέχρι κάποια φορά να αναχωρήσει με πιθανότητα $1-p$).
   1. Να βρεθεί η κατανομή του συνολικού χρόνου εξυπηρέτησης ενός πελάτη (από τη στιγμή που θα ξεκινήσει η πρώτη του εξυπηρέτηση μέχρι να φύγει από το σύστημα μετά από μία ή περισσότερες εξυπηρετήσεις).
   2. Να βρεθεί η συνθήκη ευστάθειας και η οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών $(p_n)$ σε συνεχή χρόνο.
   3. Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα.

4. (Θέμα 4 - Ιούνιος 2019) Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης (ουρά αναμονής) με 2 είδη πελατών $A$ και $B$ που φθάνουν σύμφωνα με δυο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς $\nu$ και $\lambda$ αντίστοιχα. Οι πελάτες τύπου $A$ είναι ανυπόμονοι γι

αυτό εισέρχονται στο σύστημα μόνο αν το βρουν άδειο, ενώ οι πελάτες τύπου $B$ εισέρχονται πάντα. Οι πελάτες εξυπηρετούνται ένας - ένας από 1 υπηρέτη και οι χρόνοι εξυπηρέτησής τους είναι εκθετικοί με παράμετρο $\mu$, ανεξαρτήτως τύπου. Η χωρητικότητα του συστήματος είναι άπειρη και η πειθαρχία ουράς είναι η FCFS

1. Να παρασταθεί το σύστημα ως απλή Μαρκοβιανή ουρά (να δοθεί το διάγραμμα των καταστάσεων και των δεσμευμένων ρυθμών αφίξεων και αναχωρήσεων, $\lambda_n$ και $\mu_n$). Κατόπιν, να βρεθεί η συνθήκη ευστάθειας του συστήματος και η οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών ($p_n$) σε συνεχή χρόνο.
2. Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη τύπου $B$ στο σύστημα.
3. Ως περίοδος συνεχούς λειτουργίας του συστήματος ορίζεται ο χρόνος από την στιγμή που ένας πελάτης φθάνει σε κενό σύστημα, μέχρι την επόμενη χρονική στιγμή που το σύστημα θα ξαναμείνει κενό. Να υπολογιστεί η μέση διάρκεια συνεχούς λειτουργίας του συστήματος.

5. (Θέμα 4 - Σεπτέμβριος 2018) Θεωρούμε την τροποποίηση της M/M/1 ουράς με ρυθμό αφίξεων $\lambda$ και $\text{Exp}(\mu)$ χρόνους εξυπηρέτησης, όπου κάθε πελάτης έχει χρόνο υπομονής για όσο χρόνο βρίσκεται στον χώρο αναμονής με κατανομή $\text{Exp}(\nu)$ και μόλις αυτός συμπληρωθεί ο πελάτης εγκαταλείπει το σύστημα. Διευκρινίζεται ότι ένας πελάτης που έχει αρχίσει να εξυπηρετείται, δεν εγκαταλείπει το σύστημα.
   1. Θεωρούμε το σύστημα κάποια χρονική στιγμή που υπάρχουν $n \geq 1$ πελάτες σε αυτό. Ποιά είναι η πιθανότητα (συναρτήσει των $\lambda$, $\mu$, $\nu$ και $n$) ώστε να τελειώσει ο τρέχων χρόνος εξυπηρέτησης, χωρίς να εγκαταλείψει κάποιος από τους παρόντες πελάτες το σύστημα.
   2. Να βρεθεί η οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών ($p_n$) σε συνεχή χρόνο, για την ειδική περίπτωση $\mu = \nu$.
   3. Ως περίοδος συνεχούς λειτουργίας του συστήματος ορίζεται ο χρόνος από την στιγμή που ένας πελάτης φθάνει σε κενό σύστημα, μέχρι την επόμενη χρονική στιγμή που το σύστημα θα ξαναμείνει κενό. Να υπολογιστεί η μέση διάρκεια συνεχούς λειτουργίας του συστήματος, για την ειδική περίπτωση $\mu = \nu$.

6. (Θέμα 4 - Ιούνιος 2018) Θεωρούμε την $M/M/1$ ουρά, με Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού $\lambda$, εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο $\mu$, 1 υπηρέτη, άπειρη χωρητικότητα και πειθαρχία ουράς FCFS. Θεωρούμε ότι κάθε πελάτης που φθάνει στο σύστημα εισέρχεται σε αυτό με πιθανότητα $q$.
   1. Να βρεθεί η οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα ($p_n$), σε συνεχή χρόνο.
   2. Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός αφικνούμενου πελάτη στο σύστημα (λογίζοντας 0 το χρόνο παραμονής των πελατών που αναχωρούν αμέσως) καθώς και ο μέσος χρόνος παραμονής ενός εισερχόμενου πελάτη στο σύστημα.
   3. Να βρεθεί το μέσο πλήθος πελατών που φθάνουν στο σύστημα και αναχωρούν άμεσα μεταξύ δυο διαδοχικών εισόδων πελατών στο σύστημα.