Στοχαστικά Μοντέλα

Σειρά Ασκήσεων 2 : Σύντομες απαντήσεις

Άσκηση 1 Έστω $X_1, X_2, \ldots$ οι ενδιάμεσοι χρόνοι της $\{N_1(t)\}$

$Y_1, Y_2, \ldots$ οι ενδιάμεσοι χρόνοι της $\{N_2(t)\}$

κ' $Z_1, Z_2, \ldots$ οι ενδιάμεσοι χρόνοι της $\{N(t)\}$

Τότε αν π.χ. $Z_1 = X_{11} = t_1$ έχουμε $Z_2 = \min(X_{12}, Y_{11} - t_1)$

και $P(Z_2 \le t_2) = P\left(\min(X_{12}, Y_{11} - t_1) \le t_2 \mid X_{11} = t_1, Y_{11} > t_1\right)$

η οποία εξαρτάται από το t_1.

Γενικά οι ενδιάμεσοι χρόνοι $Z_1, Z_2, \ldots$ δεν είναι ανεξάρτητες ισόνομες τ.μ.

Άσκηση 2 (a) Έστω $S_j^{(n)}$ ο χρόνος $n^{\text{οστής}}$ ανανέωσης της $\{N_j(t)\}$. Η επόμενη ανανέωση της $\{N_j(t)\}$ θα συμβεί κατά την πρώτη από τις επόμενες ανανεώσεις της $N(t)$ στην οποία ο τύπος του γεγονότος θα είναι p_j

Επομένως ο αριθμός ανανεώσεων της $\{N(t)\}$ που απαιτούνται για την $(n+1)^{\text{οστή}}$ ανανέωση της $\{N_j(t)\}$ είναι γεωμετρική τυχαία μεταβλητή (αρ. δοκιμών) με πιθ. επιτυχίας p_j

δηλαδή $P(M_j^{(n+1)} = k) = (1-p_j)^{k-1} p_j$, $k = 1, 2, \ldots$

Επειδή η στιγμή $S_j^{(n+1)}$ είναι κ' χρόνος ανανέωσης της $\{N(t)\}$

η $M_j^{(n+1)}$ είναι ανεξάρτητη της προηγούμενης ιστορίας της $\{N(t)\}$ κ' της $\{N_j(t)\}$.

Επίσης ο ενδιάμεσος χρόνος $X_j^{(n+1)}$ έχει δεσμευμένη κατανομή

$$X_j^{(n+1)} \mid \left(M_j^{n+1} = \ell\right) \stackrel{d}{=} X_1 + \dots + X_\ell$$

όπου $X_1, \dots, X_\ell$ ανεξ. ισόνομες με την κατανομή του ενδιάμεσου χρόνου της $\{N(t)\}$.

Επομένως $P\left(X_j^{(n+1)} \leq t\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} (1-p_j)^{\ell-1} p_j F_X^{(*\ell)}(t)$

Βλέπουμε ότι η κατανομή της $X_j^{(n+1)}$ δεν εξαρτάται από την προηγούμενη ιστορία της $\{N_j(t)\}$, δηλ. οι $X_j^{(1)}, X_j^{(2)}, \dots$ είναι ανεξάρτητες κ' ισόνομες επομένως η $\{N_j(t)\}$ είναι ανανεωτική διαδικασία.

(β) Η μέση τιμή του ενδιάμεσου χρόνου X_j της $\{N_j(t)\}$ είναι $E(X_j) = E(M_j) \cdot E(X) = \frac{1}{p_j} \mu$

όπου μ ο μέσος ενδιάμεσος χρόνος της $\{N(t)\}$.

Επομένως από το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{N_j(t)}{t} = \frac{p_j}{\mu}, \text{ με πιθ. } 1.$$

Ασκηση 3 Ο ενδιάμεσος χρόνος X ακολουθεί

$X \sim Erlang(2,\lambda) \Rightarrow X \overset{d}{=} Y_1 + Y_2$, $Y_1, Y_2 \sim Exp(\lambda)$

ανεξάρτητες. Επομένως

$$\tilde{F}_X(s) = \left(\tilde{F}_Y(s)\right)^2 = \frac{\lambda^2}{(\lambda+s)^2}$$

Από τη σχέση $\tilde{m}_X(s) = \dfrac{\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)}$ παίρνουμε

$$\tilde{m}_X(s) = \frac{\lambda^2}{(\lambda+s)^2-\lambda^2} = \frac{\lambda^2}{s(2\lambda+s)} = \frac{\lambda}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{4}\frac{2\lambda}{2\lambda+s}$$

Γνωρίζουμε ότι για $G_1(t) = t \Rightarrow \tilde{G}_1(s) = \frac{1}{s}$

και για $G_2(t) = 1-e^{-2\lambda t} \Rightarrow \tilde{G}_2(s) = \dfrac{2\lambda}{2\lambda+s}$

Επομένως $m_X(t) = \frac{\lambda}{2}t - \frac{1}{4}\left(1-e^{-2\lambda t}\right)$

Ασκηση 4 Εστω x η απόσταση από την είσοδο. Τότε ο αριθμός αυτοκινήτων που έχουν σταθμεύσει στο διάστημα $[0,x]$

$\{N(x), x\geq 0\}$ ακολουθεί μια ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους $D_1, D_2, \dots$ όπου

$$D \overset{d}{=} L + U \ , \quad U \sim U(0,1) \Rightarrow E(D) = \mu = L + \frac{1}{2}$$

Από το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα έχουμε

$$\lim_{x \to \infty} \frac{E(N(x))}{x} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{L + 1/2}$$

Άσκηση 5 Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με ενδιάμεσους χρόνους $U_1, U_2, \dots \sim U(0,1)$.

Τότε $K = N(1) + 1 \Rightarrow E(K) = m_U(1) + 1$.

Έχουμε δείξει ότι για ενδιάμεσους χρόνους $\sim U(0,1)$ ισχύει $m_U(t) = e^t - 1$ για $t \in [0,1]$. Επομένως $m_U(1) = e - 1$ και $E(K) = e$.

Άσκηση 6 Η απόδειξη θα γίνει σύμφωνα με την Υπόδειξη 1 (με την Υπόδειξη 2 είναι άμεση).

Έστω $h(t) = E\left(S_{N(t)+1}\right)$.

Δεσμεύοντας ως προς το χρόνο πρώτης ανανέωσης έχουμε:

$$E\left(S_{N(t)+1} \mid X_1 = u\right) = \begin{cases} u + h(t-u) & , 0 \le u \le t \\ u & , u > t \end{cases}$$

Επομένως $h(t) = \int_0^\infty E\left(S_{N(t)+1} \mid X_1 = u\right) dF_X(u)$

$$= \int_0^t \left[u + h(t-u)\right] dF_X(u) + \int_t^\infty u \, dF_X(u) = \int_0^\infty u \, dF_X(u) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u)$$

$$\Rightarrow h(t) = \mu + \int_0^t h(t-u) \, dF_X(u).$$

Επομένως η $h(t)$ ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση με $d(t) = \mu$.

Γνωρίζουμε ότι η μοναδική λύση της ανανεωτικής εξίσωσης δίνεται από τον τύπο:

$$h(t) = d(t) + \int_0^t d(t-u) \, dm_X(u) = d(t) + (d * m_X)(t).$$

Εδώ $d(t) = \mu$ επομένως

$$h(t) = \mu + \int_0^t \mu \, dm_X(u) = \mu + \mu \int_0^t dm_X(u) = \mu\left(1 + m_X(t)\right)$$

Άσκηση 7

$$h(t) = E\left(S_{N(t)+1} - S_{N(t)}\right)$$

Έχουμε ότι για $X_1 = u > t$: $N(t) = 0$, $N(t)+1 = 1$

$$\Rightarrow S_{N(t)+1} = S_1 = X_1 = u$$

Επίσης για $X_1 = u \leq t$: $E\left(S_{N(t)+1} - S_{N(t)} \middle| X_1 = u\right) = h(t-u)$.

Επομένως $h(t) = E\left(S_{N(t)+1} - S_{N(t)}\right) =$

$$= \int_0^t h(t-u)\,dF_X(u) + \int_t^\infty u\,dF_X(u) =$$

$$= d(t) + \int_0^t h(t-u)\,dF_X(u).$$

Για τη συνάρτηση $d(t)$ παρατηρούμε ότι γράφεται ως $d(t) = d_1(t) - d_2(t)$, όπου

$$d_1(t) = \int_t^\infty u\,dF_X(u), \quad d_2(t) = 0.$$

Για την $d_1(t)$ έχουμε $d_1(t) \geq 0$,

$d_1(t) \leq \int_0^\infty u\,dF_X(u) = \mu$ και $d_1(t)$ φθίνουσα.

Επομένως η $d(t)$ εκφράζεται ως διαφορά δύο φραγμένων, φθινουσών και αρνητικών συναρτήσεων.

Επιπλέον $\displaystyle\int_0^\infty |d(t)|dt = \int_{t=0}^{\infty} \int_{u=}^{\infty} u\, dF_X(u)\, dt =$

$$= \int_{u=0}^{\infty} \int_{t=0}^{u} u\, dt\, dF_X(u) = \int_{u=0}^{\infty} u^2 dF_X(u) = E(X^2)$$

$= \mu^2 + \sigma^2 < \infty$. Επομένως ικανοποιούνται οι συνθήκες του βασικού ανανεωτικού θεωρήματος

συνεπώς $\displaystyle\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{\int_0^\infty d(t)dt}{\mu} = \frac{\mu^2+\sigma^2}{\mu}$.

Άσκηση 8 (α) Έστω $N(t)$ ο αριθμός των προγραμματισμένων επισκευών στο διάστημα $[0,t]$. Η $\{N(t)\}$ είναι ανανεωτική διαδικασία με σταθερούς χρόνους ανανέωσης $X_n = T$, επομένως $S_n = nT$, $n = 1, 2, \dots$

Έστω $C(t)$ το συνολικό κόστος στο $[0,t]$.

Η $\{C(t), t\geq 0\}$ είναι διαδικασία κόστους σύμβατή με την $\{N(t)\}$. Πραγματικά

Έστω $C_n = C(S_n) - C(S_{n-1})$ το κόστος κατά τη διάρκεια του $n^{οστου}$ κύκλου ανανέωσης.

Επειδή στην αρχή κάθε κύκλου όλα τα μηχανήματα είναι σαν καινούργια, ο αριθμός αποτυχιών στη διάρκεια του κύκλου είναι ανεξάρτητος από την προηγούμενη ιστορία και ακολουθεί την ίδια κατανομή σε κάθε κύκλο. Επομένως οι $C_1, C_2, \ldots$ είναι α.ι.τ.μ.

Έστω (X, C) το τυπικό ζεύγος διάρκειας και κόστους ενός ανανεωτικού κύκλου.

Έχουμε $X = T$. Για τη C έχουμε

$C = c_1 + c_2 R(T)$, όπου $R(T)$ ο αριθμός αποτυχιών στη διάρκεια διαστήματος μήκους T.

Επειδή οι χρόνοι λειτουργίας των διαδοχικών μηχανημάτων είναι αιτημ με $X \sim Erlang(2,\lambda)$ η $\{R(t), t \geq 0\}$ είναι ανανεωτική διαδικασία.

Η ανανεωτική συνάρτηση $m_R(t)$ δίνεται από

$$m_R(t) = \frac{1}{2}\lambda t - \frac{1}{4}\left(1 - e^{-2\lambda t}\right) \quad (\text{Άσκηση } 3).$$

Επομένως $E(R(T)) = \frac{1}{2}\lambda T - \frac{1}{4}\left(1 - e^{-2\lambda T}\right)$

και $E(C) = c_1 + c_2\left(\frac{1}{2}\lambda T - \frac{1}{4}\left(1 - e^{-2\lambda T}\right)\right) =$

$$c_1 + \frac{c_2}{2}\lambda T - \frac{c_2}{4}\left(1 - e^{-2\lambda T}\right)$$

Από το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα με κόστη παίρνουμε ότι το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου ισούται με

$$g(T) = \lim \frac{E(C(t))}{t} = \frac{E(C)}{T} = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2\, m_R(T)}{T}$$

$$= \frac{c_1}{T} + \frac{c_2 \lambda}{2} - \frac{c_2}{4}\,\frac{1 - e^{-2\lambda T}}{T}$$

Για την ελαχιστοποίηση της $g(T)$ ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα: (δείξτε τα)

1) $$g'(T) = -\frac{c_1}{T^2} - \frac{c_2}{4}\,\frac{2\lambda T e^{-2\lambda T} - (1-e^{-2\lambda T})}{T^2}$$

2) $\lim_{T\to 0} g(T) = +\infty$, $\lim_{T\to\infty} g(T) = \frac{c_2\lambda}{2}$, $\lim_{T\to 0} g'(T) = -\infty$

3) $$g'(T) = 0 \Leftrightarrow c_1 + \frac{c_2}{4}\left[2\lambda T e^{-2\lambda T} - (1-e^{-2\lambda T})\right] = 0 \quad (*)$$

4) Η $c_1 + \frac{c_2}{4}\left(2\lambda T e^{-2\lambda T} - (1-e^{-2\lambda T})\right)$ είναι φθίνουσα ως προς T.

5) Αν $c_1 \geq \frac{c_2}{4}$ η $g'(T)=0$ δεν έχει λύση για $T\in(0,\infty)$

6) Αν $c_1 < \frac{c_2}{4}$ η $g'(T)=0$ έχει μοναδική λύση $\mathring{T}\in(0,\infty)$

Με βάση τα παραπάνω έχουμε τις εξής περιπτώσεις

i) Αν $c_1 \geq \frac{c_2}{4}$ τότε η $g(T)$ είναι φθίνουσα για $T\in(0,\infty)$ επομένως δεν υπάρχει σημείο ελαχίστου (το μέσο κόστος μειώνεται συνεχώς όσο αυξάνει το T.

ii) Αν $c_1 < \frac{c_2}{4}$ τότε η $g(T)$ έχει μοναδικό σημείο ελαχίστου που προκύπτει από τη λύση της $(*)$

Άσκηση 9

Έστω $S_1, S_2, \ldots$ οι διαδοχικοί χρόνοι όπου ολοκληρώνεται μια επισκευή. Η διαδικασία $\{N(t)\}$ με $N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$ είναι ανανεωτική διαδικασία, καθώς στα σημεία ολοκλήρωσης επισκευής και τα τρία μηχανήματα είναι σαν καινούργια λόγω των εκθετικών χρόνων λειτουργίας και της αμνήμονης ιδιότητας. Για τους ενδιάμεσους χρόνους $X_1, X_2, \ldots$ παρατηρούμε τα εξής:

Έστω $Y_i \sim Exp(\lambda_i)$ οι χρόνοι ζωής των τριών μηχανημάτων κατά την έναρξη ενός ανανεωτικού κύκλου.

Ο χρόνος μέχρι την πρώτη βλάβη είναι $Y = \min(Y_1, Y_2, Y_3)$ επομένως $Y \sim Exp(\lambda)$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.

Μετά την πρώτη βλάβη ο χρόνος επισκευής R ακολουθεί κατανομή $Exp(r_1)$ με πιθανότητα λ_1/λ (δηλαδή πιθανότητα να χαλάσει πρώτο το μηχάνημα 1) κατανομή $Exp(r_2)$ με πιθανότητα λ_2/λ κ' $Erlang(n, r_3)$ με πιθανότητα λ_3/λ.

Η διάρκεια του ανανεωτικού κύκλου είναι $X = Y + R$

Επομένως $F_X(t) = (F_Y * F_R)(t)$.

Επίσης $E(X) = E(Y) + E(R)$

$$= \frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda_1}{\lambda}\cdot\frac{1}{r_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{1}{r_2} + \frac{\lambda_3}{\lambda}\frac{n}{r_3}$$

(α) Έστω ότι για όσο χρόνο λειτουργεί το σύστημα υπάρχει μια αμοιβή $c=1$ ανά μονάδα χρόνου. Τότε η συνολική αμοιβή στη διάρκεια ενός κύκλου $X = Y + R$ είναι ίση με Y

Το ποσοστό χρόνου που το σύστημα λειτουργεί σε μεγάλο ορίζοντα είναι ίσο με το όριο του μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{C(t)}{t} \overset{\mu.\pi\iota\theta.1}{=} \frac{E(C)}{E(X)} = \frac{E(Y)}{E(X)} = \frac{1/\lambda}{\frac{1}{\lambda}+\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{1}{r_1}+\frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{1}{r_2}+\frac{\lambda_3}{\lambda}\frac{n}{r_3}}$$

(β) Στη διάρκεια ενός ανανεωτικού κύκλου ο χρόνος R που το μηχάνημα 1 επισκευάζεται είναι ίσος με 0 με πιθανότητα $\frac{\lambda_2+\lambda_3}{\lambda}$, ενώ με πιθανότητα $\frac{\lambda_1}{\lambda}$ ακολουθεί $Exp(r_1)$. Επομένως $E(R) = \frac{\lambda_1}{\lambda}\cdot\frac{1}{r_1}$

και $$\lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T 1(\text{μηχ επισκ. τη στιγμή } t)\,dt}{T} = \frac{E(R_1)}{E(X)} = \frac{\frac{\lambda_1}{\lambda}\cdot\frac{1}{r_1}}{E(X)}$$

(γ) Το μηχάνημα 2 βρίσκεται σε κατάσταση ετοιμότητας όσο επισκευάζεται οποιδήποτε από τα 1, 3.

Επομένως όμοια με το (β)

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^T 1(\text{το 2 σε ετοιμ. τη στιγμή } t)\, dt}{T} = \frac{\frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{1}{r_1} + \frac{\lambda_3}{\lambda}\frac{n}{r_3}}{E(X)}$$

Άσκηση 10 Έστω $N(t) = \sup\{n\geq 0 : S_n \leq t\}$

όπου $S_1, S_2, \ldots$ οι διαδοχικές στιγμές άφιξης στην A (υποθέτουμε ότι αρχικά το φορτηγό βρίσκεται στην A).

Τότε η $\{N(t), t\geq 0\}$ είναι ανανεωτική διαδικασία και η κατανομή του ενδιάμεσου χρόνου ανανέωσης υπολογίζεται ως εξής: Έστω D η απόσταση μεταξύ των πόλεων σε km (ίδια και στις δύο κατευθύνσεις).

Τότε $X = X_{AB} + X_{BA}$ όπου X_{AB}, X_{BA} οι χρόνοι μετάβασης και επιστροφής.

$$X_{AB} = \frac{D}{V_{AB}}, \text{ όπου } V_{AB} \sim \mathcal{U}(60,80)$$

$$X_{BA} = \frac{D}{V_{BA}}, \text{ όπου } P(V_{BA}=60) = P(V_{BA}=80) = \frac{1}{2}.$$

Επομένως $E(X_{AB}) = \int_{60}^{80} \frac{D}{v}\frac{1}{20}\,dv = \frac{D}{20}\ln\frac{80}{60} = \frac{D}{20}\ln\frac{4}{3}$

$$E(X_{BA}) = \frac{D}{60}\cdot\frac{1}{2} + \frac{D}{80}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7D}{480}$$

$$E(X) = D\cdot\left(\frac{1}{20}\ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{7}{480}\right)$$

(α) Από το βασικό ανανεωτικό θεώρημα με κόστη προκύπτει ότι το ποσοστό χρόνου σε μεγάλο ορίζοντα που το φορτηγό κινείται από A προς B είναι ίσο με

$$\frac{E(X_{AB})}{E(X)} = \frac{\frac{1}{20}\ln\left(\frac{4}{3}\right)}{\frac{1}{20}\ln\left(\frac{4}{3}\right)+\frac{7}{480}} \simeq 49{,}66\%.$$

(β) Στη διαδρομή $A \to B$ η πιθανότητα να κινείται με 60 χλ/ώρα είναι μηδέν επειδή η V_{AB} είναι συνεχής τμ. Στη διαδρομή $B \to A$ η πιθανότητα να κινείται με 60 χλ/ώρα είναι 1/2. Έστω T_{60} το χρονικό διάστημα στη διάρκεια ενός κύκλου που το φορτηγό κινείται με 60 χλ/ώρα. Με βάση τα παραπάνω $E(T_{60}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{D}{60}$. Επομένως το ζητούμενο ποσοστό χρόνου είναι ίσο με

$$\frac{E(T_{60})}{E(X)} = \frac{\frac{1}{120}}{\frac{1}{20}\ln\left(\frac{4}{3}\right)+\frac{7}{480}} \simeq 28{,}77\%.$$

Άσκηση 11

Έστω $S_n, n=1,2,\ldots$ οι διαδοχικοί χρόνοι επιστροφής του αστυνομικού στο σημείο στάθμευσης και $N(t) = \sup\{n\geq 0 : S_n \leq t\}$. Η $\{N(t), t\geq 0\}$ είναι ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους $X=2$. Ένα αυτοκίνητο που σταθμεύει για 3 ώρες θα πάρει πρόστιμο αν ο υπολειπόμενος χρόνος $R(t) = S_{N(t)+1}-t$ από τη στιγμή στάθμευσης t μέχρι την επόμενη άφιξη του αστυνομικού είναι $R(t)\leq 1$.

Υποθέτουμε ότι οι αφίξεις του αστυνομικού γίνονται χωρίς διακοπή κ' έχουν ξεκινήσει πριν από πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα, επομένως ζητούμε να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{t\to\infty} P(R(t)\leq 1) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T 1(R(t)\leq 1)\,dt$$

$$= \frac{E(C)}{E(X)} = \frac{1}{2}E(C),$$ όπου C το χρονικό διάστημα στη διάρκεια ενός κύκλου ανανέωσης όπου $R(t)\leq 1$.

Επειδή ο κύκλος ανανέωσης έχει σταθερό μήκος $X=2$, ισχύει $R(t)\leq 1$ για $t\in[X-1,X]$ επομένως το μήκος C του διαστήματος αυτού είναι ίσο με 1 με πιθανότητα 1.

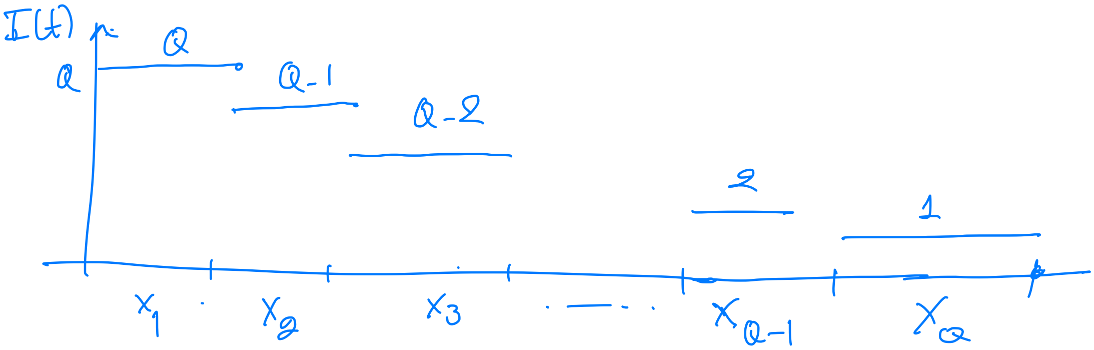
Επομένως $\frac{E(C)}{E(X)} = 1/2$.

Άσκηση 12 (α) Έστω S_n, $n=1,2,\ldots$ οι διαδοχικές χρονικές στιγμές εξάντλησης του αποθέματος και άφιξης της νέας ποσότητας Q. Αν $N(t)=\sup\{n\geq 1 : S_n\leq t\}$, η $\{N(t), t\geq 0\}$ είναι ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους $Y_1, Y_2, \ldots$, όπου $Y \overset{d}{=} X_1+\cdots+X_Q$ και $X_1,\ldots,X_Q$ ανεξάρτητες κ' ισόνομες τμ. $\sim F_X$.

Επομένως το μέσο μήκος του ανανεωτικού κύκλου της διαδικασίας παραγγελιών είναι $E(Y)=Q\mu$

Στη διάρκεια ενός ανανεωτικού κύκλου το συνολικό κόστος είναι ίσο με $C = K + h\int_0^T I(t)\,dt$

όπου $I(t)$ οι μονάδες προϊόντος σε απόθεμα τη στιγμή t. Η $I(t)$ έχει την παρακάτω μορφή:



Επομένως $\int_0^T I(t)\,dt = Q X_1 + (Q-1)X_2 + \dots + 2X_{Q-1} + X_Q$

και $C = K + h\sum_{j=1}^{Q}(Q-j+1)X_j$, επομένως

$$E(C) = K + h\mu\sum_{j=1}^{Q}(Q-j+1) = K + h\mu\cdot\left(Q + (Q-1) + \dots + 1\right)$$
$$= K + h\mu\frac{Q(Q+1)}{2}$$

Από το βασικό ανανεωτικό θεώρημα με κόστη, το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου σε μεγάλο ορίζοντα είναι ίσο με

$$g(Q) = \frac{E(C)}{E(Y)} = \frac{K + h\mu\frac{Q(Q+1)}{2}}{\mu Q} = \frac{K}{\mu Q} + \frac{1}{2}h(Q+1)$$

(β) Θεωρούμε την επέκταση της g με πεδίο ορισμού το $(0,\infty)$. Η $g(x)$ είναι κυρτή για $x\in(0,\infty)$

και $g'(x) = -\frac{K}{\mu x^2} + \frac{1}{2}h$, επομένως έχει μοναδικό σημείο ελαχίστου x^* : $g(x^*) = 0 \Rightarrow x^* = \sqrt{\frac{2K}{\mu h}}$

Τώρα η ακέραια τιμή του Q που ελαχιστοποιεί την $g(Q)$ για $Q = 1, 2, \ldots$ είναι μια από τις δύο κοντινότερες ακέραιες τιμές στο x^* δηλαδή τις $\lfloor x^* \rfloor$ και $\lfloor x^* \rfloor + 1$. Η βέλτιστη τιμή Q^* είναι εκείνη από τις $\lfloor x^* \rfloor$ και $\lfloor x^* \rfloor + 1$ για την οποία προκύπτει μικρότερο μέσο κόστος.

(Τα παραπάνω ισχύουν αν $x^* \notin \mathbb{N}$. Στην ειδική περίπτωση όπου $x^* \in \mathbb{N}$, τότε $Q^* = x^*$.)