Επιχειρησιακή Έρευνα: Στοχαστικά Μοντέλα 2021-22
Σειρά Ασκήσεων 1

ΑΣΚΗΣΗ 1. Δίνονται τυχαίες μεταβλητές X, Y, όπου η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της Y είναι $F_Y(y)$ με μέση τιμή $E_Y(Y)$ και διασπορά $Var_Y(Y)$. Η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής της X δεδομένης της τιμής της Y είναι $F_{X|Y}(x|y)$ με μέση τιμή $E(X|Y = y) = m_{X|Y}(y)$ και διασπορά $Var(X|Y = y) = \sigma^2_{X|Y}(y)$.
Δείξτε ότι $E(X) = E_Y(m_{X|Y}(Y))$ και $Var(X) = E_Y(\sigma^2_{X|Y}(Y)) + Var_Y(m_{X|Y}(Y))$.

ΑΣΚΗΣΗ 2. Δίνονται τυχαίες μεταβλητές X, Y, όπου η περιθώρια κατανομή της Y είναι $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2_Y)$, ενώ η δεσμευμένη κατανομή της X δεδομένης της τιμής της Y είναι $X|Y = y \sim \mathcal{N}(ay, \sigma^2 y)$. Να υπολογιστούν η μέση τιμή και η διασπορά της X.

ΑΣΚΗΣΗ 3. Θεωρήστε το εξής πείραμα τύχης: Έστω $k \in \{1, \dots, 6\}$. Ρίχνουμε ένα δίκαιο ζάρι διαδοχικά και $X_1, X_2, \dots$ είναι τα αποτελέσματα των ρίψεων. Έστω $N = \inf\{n \geq 1 : X_n = k\}$ ο αριθμός των ρίψεων έως την πρώτη φορά που το αποτέλεσμα είναι k, και $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ το άθροισμα των N ρίψεων.
(α) Δείξτε ότι δεν ισχύουν οι ικανές συνθήκες για να μπορεί να εφαρμοστεί ο τύπος του Wald για ανεξάρτητες N και $X_1, X_2, \dots$: $E(S_N) = E(N)E(X)$.
(β) Δείξτε ότι παρ' όλα αυτά ισχύει ότι $E(S_N) = E(N)E(X)$.
Σημείωση: Ο τύπος του Wald ισχύει γενικότερα όταν η N είναι *χρόνος διακοπής (stopping time)*. Συγκεκριμένα έστω $\{X_1, X_2, \dots\}$ μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών (όχι απαραίτητα ανεξάρτητων). Μια τυχαία μεταβλητή N λέγεται χρόνος διακοπής ως προς την ακολουθία $\{X_n\}$, αν η N παίρνει θετικές ακέραιες τιμές και το γεγονός $\{N = n\}$ προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τις τιμές των $X_1, X_2, \dots, X_n$. Η ιδέα είναι η εξής: Έστω ότι ένας παίκτης παίζει ένα παιχνίδι σε βήματα και στο βήμα $n = 1, 2, \dots$ παρατηρεί την τιμή της τυχαίας μεταβλητής X_n. Σε κάθε βήμα έχει το δικαίωμα να συνεχίσει ή να σταματήσει και να διακόψει το παιχνίδι για πάντα. Η απόφασή του για διακοπή στο βήμα n εξαρτάται μόνο από τις τιμές $X_1, X_2, \dots, X_n$ που έχει παρατηρήσει μέχρι αυτό το σημείο, αλλά μπορεί να είναι οποιαδήποτε συνάρτηση αυτών των μεταβλητών (με άλλα λόγια ο παίκτης αποφασίζει να σταματήσει ή όχι βασιζόμενος μόνο στη μέχρι στιγμής ιστορία των $\{X_n\}$ και όχι στις μελλοντικές τιμές ή σε οποιαδήποτε άλλη πληροφορία, αλλά μπορεί να εφαρμόσει οποιοδήποτε κανόνα διακοπής με αυτόν το περιορισμό). Έστω N η τυχαία μεταβλητή που δείχνει το βήμα στο οποίο θα σταματήσει ο παίκτης. Τότε η N είναι χρόνος διακοπής ως προς την ακολουθία $\{X_n\}$. Στην άσκησή μας είναι εύκολο να δούμε ότι η N είναι χρόνος διακοπής ως προς την ακολουθία $\{X_n\}$, επομένως ο τύπος του Wald συνεχίζει να ισχύει.

ΑΣΚΗΣΗ 4. Έστω ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2 \dots$ με $X_i \geq 0$ και $E(X_i) = \mu_X < 1$. Έστω επίσης ακέραια τυχαία μεταβλητή $N \geq 1$ ανεξάρτητη των $X_1, X_2, \dots$, με συνάρτηση πιθανότητας $p_N(k) = P(N = k), k \geq 1$ και πιθανογεννήτρια $\tilde{p}_N(z)$. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $\Pi_N = \prod_{i=1}^{N} X_i$. Να υπολογιστεί η μέση τιμή $E(\Pi_N)$.

ΑΣΚΗΣΗ 5. Έστω τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής $F_X(x), x \in \mathbb{R}$ και $P(0 \leq X < 1) = 1$. Έστω επίσης ακέραια τυχαία μεταβλητή $N \geq 1$ ανεξάρτητη της X με συνάρτηση πιθανότητας $p_N(k) = P(N = k), k \geq 1$ και πιθανογεννήτρια $\tilde{p}_N(z)$. Θεωρούμε την τυχαία δύναμη της X: $M_N = X^N$. Δείξτε ότι $E(M_N) = E(\tilde{p}_N(X))$.

ΑΣΚΗΣΗ 6. Έστω μη αρνητική ακέραια τυχαία μεταβλητή X με πιθανογεννήτρια $\tilde{p}_X(z) = ce^{\lambda z^k}$, όπου $\lambda > 0, k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$.
(α) Να προσδιοριστεί η σταθερά c.
(β) Να προσδιοριστεί η κατανομή της X.

ΑΣΚΗΣΗ 7. Δείξτε ότι
$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{n} z^k = \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 8. Έστω ακέραια τυχαία μεταβλητή $X \geq 0$ με πιθανογεννήτρια
$$\tilde{p}_X(z) = \frac{5 - 2z}{z^2 - 6z + 8}.$$
Να βρεθεί η κατανομή της X.

ΑΣΚΗΣΗ 9. Έστω ακέραια τυχαία μεταβλητή $X \geq 0$ με πιθανογεννήτρια
$$\tilde{p}_X(z) = \frac{\alpha}{3z^2 - 10z + 8}.$$

Να προσδιοριστεί η τιμή του α και να βρεθεί η κατανομή της X.

ΑΣΚΗΣΗ 10. Θέτουμε ένα μηχάνημα σε λειτουργία. Το μηχάνημα έχει πιθανότητα $1/4$ να είναι ελαττωματικό και να μην μπορέσει να ξεκινήσει. Αν ξεκινήσει, ο χρόνος λειτουργίας ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = 5$. Έστω T ο χρόνος λειτουργίας του μηχανήματος. Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής $F_T(t)$ και η μέση τιμή μ_T της T.

ΑΣΚΗΣΗ 11. Δίνεται τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{4}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{x+1}{4}, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

Να υπολογιστεί η μέση τιμή $E(X)$ και ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes $\tilde{F}_X(s)$.

ΑΣΚΗΣΗ 12. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes των παρακάτω συναρτήσεων (σε όλες το πεδίο ορισμού είναι το $[0, \infty]$):

1. $F(t) = t$
2. $F(t) = t^n, n \geq 1, n \in \mathbb{Z}$
3. $F(t) = e^{at}, a > 0$.
4. $F(t) = \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}$
5. $F(t) = \int_0^t f(u)du$ συναρτήσει του μετασχηματισμού Laplace-Stieltjes $\tilde{f}(s)$ της $f(t)$, όπου $f(t) \geq 0$ στο $[0, \infty)$.
6. $F(t) = f'(t)$ συναρτήσει του μετασχηματισμού Laplace-Stieltjes $\tilde{f}(s)$ της $f(t)$, όπου $f(t) \geq 0$, παραγωγίσιμη και αύξουσα στο $[0, \infty)$ με $f(0) = 0$. (Υπόδειξη: Εκφράστε την f συναρτήσει της F.)

ΑΣΚΗΣΗ 13. Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X \sim Exp(\lambda)$ και $Y \sim Exp(\mu)$, και $Z = X + Y$. Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της Z:

1. Απευθείας
2. Μέσω μετασχηματισμού Laplace-Stieltjes.

ΑΣΚΗΣΗ 14. Έστω τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ και μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes $\tilde{F}_X(s)$, και Y ανεξάρτητη της X με $Y \sim Exp(\lambda)$. Δείξτε ότι $P(X < Y) = \tilde{F}_X(\lambda)$.

ΑΣΚΗΣΗ 15. Έστω τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ και Y τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη της X με συνάρτηση κατανομής $F_Y(y)$. Δείξτε την ισχυρή αμνήμονη ιδιότητα

$$P(X > Y + t | X > Y) = P(X > t), \forall t \geq 0.$$

ΑΣΚΗΣΗ 16. Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X \sim Exp(\lambda)$ και $Y \sim Exp(\mu)$, και $Z = \max(X, Y)$. Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής $F_Z(z)$ της Z και ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes $\tilde{F}_Z(s)$.

ΑΣΚΗΣΗ 17. Θέλουμε να κατεβάσουμε δύο αρχεία Α, Β από το διαδίκτυο. Το αρχείο Α είναι διαθέσιμο στις ιστοσελίδες $A_1, \ldots, A_n$ και ο χρόνος λήψης από την A_i ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ_i. Το αρχείο Β είναι διαθέσιμο στις ιστοσελίδες $B_1, \ldots, B_m$ και ο χρόνος λήψης από την B_i ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο μ_i (όλοι οι χρόνοι ανεξάρτητοι μεταξύ τους).
Έστω ότι την ίδια χρονική στιγμή αρχίζουμε ταυτόχρονα τη λήψη των δύο αρχείων από όλες τις πηγές.

1. Ποια είναι η πιθανότητα το αρχείο Α να κατέβει πριν το αρχείο Β;
2. Να υπολογιστεί ο μέσος χρόνος μέχρι να κατέβουν και τα δύο αρχεία.