Επιχειρησιακή Έρευνα: Στοχαστικά Μοντέλα 2021-22
Σειρά Ασκήσεων 2: Ανανεωτικές και Αναγεννητικές Διαδικασίες

ΑΣΚΗΣΗ 1. Έστω $\{N_1(t))\}, \{N_1(t))\}$ δύο ανεξάρτητες ανανεωτικές διαδικασίες και $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$. Είναι η $\{N(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
Υπόδειξη: Η $\{N(t)\}$ είναι απαριθμήτρια διαδικασία. Για να είναι ανανεωτική πρέπει και αρκεί οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ των γεγονότων να είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.

ΑΣΚΗΣΗ 2. Έστω $\{N(t))\}$ ανανενωτική διαδικασία με μέσο ενδιάμεσο χρόνο μ. Υποθέτουμε ότι κάθε γεγονός αυτής της διαδικασίας είναι τύπου j με πιθανότητα p_j, για $j = 1, \ldots, K$ όπου $p_1 + \cdots + p_K = 1$. Οι τύποι των γεγονότων είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους και ανεξάρτητοι από τους χρόνους των γεγονότων. Έστω $N_j(t))$ ο αριθμός γεγονότων τύπου j στο διάστημα $[0, t]$. **(α)** Δείξτε ότι η $\{N_j(t)\}$ είναι ανανεωτική διαδικασία για κάθε $j = 1, \ldots, K$. **(β)** Υπολογίστε το όριο $\lim_{t\to\infty} \frac{N_j(t)}{t}$.

ΑΣΚΗΣΗ 3. Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ της οποίας οι ενδιάμεσοι χρόνοι $X_1, X_2, \ldots$ ακολουθούν κατανομή Erlang(2,λ), δηλαδή έχουν συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}, x \geq 0$.
Δείξτε ότι η ανανεωτική συνάρτηση δίνεται από τον τύπο $m_X(t) = \frac{1}{2}\lambda t - \frac{1}{4}(1 - e^{-2\lambda t})$.

ΑΣΚΗΣΗ 4. Αυτοκίνητα φτάνουν σε ένα χώρο όπου σταθμεύουν το ένα πίσω από το άλλο. Κάθε αυτοκίνητο έχει μήκος ακριβώς ίσο με L. Το πρώτο αυτοκίνητο σταθμεύει ακριβώς μπροστά στην είσοδο. Κάθε ένα από τα επόμενα σταθμεύει πίσω από το προηγούμενό του σε μια τυχαία απόσταση από αυτό που ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή $U(0, 1)$. Έστω $N(x)$ ο αριθμός των αυτοκινήτων που έχουν σταθμεύσει μέσα σε απόσταση x από την είσοδο. Υπολογίστε το όριο:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{E(N(x))}{x}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 5. Έστω $U_1, U_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν ομοιόμορφη (0,1) κατανομή. Έστω $K = \min\{n \geq 1 : U_1 + \cdots + U_n > 1\}$. Δείξτε ότι $E(K) = e$.

ΑΣΚΗΣΗ 6. Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ της οποίας οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν κατανομή $F_X(t)$ με μέση τιμή μ. Δείξτε ότι

$$E(S_{N(t)+1}) = \mu(m(t) + 1), t \geq 0,$$

όπου $m(t)$ η ανανεωτική συνάρτηση.
Υπόδειξη:

1. Η απόδειξη μπορεί να γίνει θέτοντας $h(t) = E(S_{N(t)+1})$, διατυπώνοντας μια ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$ και εφαρμόζοντας τον τύπο για τη λύση της.

2. Εναλλακτικά η σχέση μπορεί να αποδειχθεί απευθείας με εφαρμογή της ταυτότητας του Wald, παρατηρώντας ότι η τυχαία μεταβλητή $N(t) + 1$, δηλαδή ο αριθμός της πρώτης ανανέωσης μετά το t είναι χρόνος διακοπής ως προς την ακολουθία $\{X_n\}$ (βλ. Σειρά Ασκήσεων 1 - Άσκηση 3).

ΑΣΚΗΣΗ 7. Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ της οποίας οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν απεριοδική κατανομή $F_X(t)$ με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Δείξτε ότι

$$\lim_{t\to\infty} E(S_{N(t)+1} - S_{N(t)}) = \frac{\mu^2 + \sigma^2}{\mu}.$$

Υπόδειξη: Έστω $E(S_{N(t)+1} - S_{N(t)})$. Διατυπώστε μια ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$ και εφαρμόστε το βασικό ανανεωτικό θεώρημα.

ΑΣΚΗΣΗ 8. Ο χρόνος λειτουργίας ενός μηχανήματος είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κατανομή Erlang$(2, \lambda)$. Όταν το μηχάνημα χαλάσει αντικαθίσταται αυτόματα από ένα άλλο με κόστος c_2. Ο υπεύθυνος του εργοστασίου εφαρμόζει πολιτική ομαδικής αντικατάστασης με περίοδο T σύμφωνα με την οποία στο τέλος κάθε περιόδου μήκους T όλα

τα μηχανήματα που έχουν στο μεταξύ χαλάσει όπως επίσης και αυτό που λειτουργεί εκείνη τη στιγμή επισκευάζονται και γίνονται καινούργια. Ο χρόνος επισκευής θεωρείται αμελητέος ενώ το κόστος της επισκευής είναι ίσο με c_1 (ανεξάρτητα από το πόσα μηχανήματα επισκευάζονται). Μετά την επισκευή ένα από τα μηχανήματα μπαίνει πάλι σε λειτουργία και η διαδικασία επαναλαμβάνεται.
(α) Έστω $C(t)$ το συνολικό κόστος αντικαταστάσεων και επισκευών στο διάστημα $[0, t]$. Να υπολογίσετε το αναμενόμενοο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου σε μεγάλο ορίζοντα:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(C(t))}{t}.$$

(β) Να βρείτε το βέλτιστο μήκος της περιόδου ομαδικής αντικατάστης T^* που ελαχιστοποεί το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου σε μεγάλο ορίζοντα.
Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα αποτελέσματα της Άσκησης 2.

ΑΣΚΗΣΗ 9. Σε ένα εργοστάσιο η παραγωγή απαιτεί να λειτουργούν ταυτόχρονα 3 διαφορετικά μηχανήματα. Το μηχάνημα i έχει χρόνο λειτουργίας που ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda_i, i = 1, 2, 3$. Όταν χαλάσει οποιοδήποτε μηχάνημα η παραγωγή διακόπτεται, τα άλλα δύο μηχανήματα μπαίνουν σε κατάσταση ετοιμότητας και το μηχάνημα που χάλασε επισκευάζεται. Οι χρόνοι επισκευής των μηχανημάτων 1 και 2 ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο $r_i, i = 1, 2$ ενώ του μηχανήματος 3 ακολουθεί κατανομή Erlang(n, r_3). Όταν ένα μηχάνημα επισκευαστεί θεωρείται ότι είναι σαν καινούργιο και όλη η παραγωγική διαδικασία ξεκινά από την αρχή.
(α) Να υπολογίσετε το ποσοστό χρόνου σε μεγάλο ορίζοντα που το σύστημα λειτουργεί.
(β) Να υπολογίσετε το ποσοστό χρόνου σε μεγάλο ορίζοντα που μηχάνημα 1 βρίσκεται σε διαδικασία επισκευής.
(γ) Να υπολογίσετε το ποσοστό χρόνου σε μεγάλο ορίζοντα που μηχάνημα 2 βρίσκεται σε κατάσταση ετοιμότητας χωρίς να λειτουργεί ή να επισκευάζεται.

ΑΣΚΗΣΗ 10. Ένα φορτηγό κάνει συνεχώς δρομολόγια μεταξύ δύο πόλεων Α και Β. Όταν ταξιδεύει από Α προς Β ο οδηγός επιλέγει μια ταχύτητα που είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη μεταξύ 60 και 80 χλμ/ώρα και οδηγεί σταθερά με αυτή την ταχύτητα σε όλη τη διαδρομή. Όταν ταξιδεύει από Β προς Α επιλέγει ισοπίθανα ταχύτητα είτε 60 είτε 80 χλμ/ώρα και οδηγεί σταθερά με αυτή σε όλη τη διαδρομή.
(α) Να υπολογίσετε το ποσοστό χρόνου σε μεγάλο ορίζοντα που το φορτηγό κινείται από Α προς Β.
(β) Να υπολογίσετε το ποσοστό χρόνου σε μεγάλο ορίζοντα που το φορτηγό κινείται με ταχύτητα 60 χλμ/ώρα.

ΑΣΚΗΣΗ 11. Η δημοτική αρχή μιας πόλης έχει θέσει ένα κανονισμό στάθμευσης σε ένα κεντρικό σημείο, σύμφωνα με τον οποίο ένα αυτοκίνητο μπορεί να σταθμεύσει δωρεάν για ένα διάστημα 2 ωρών το πολύ αλλά αν παραμείνει πάνω από 2 ώρες θα πάρει πρόστιμο. Για την εφαρμογή του κανονισμού η δημοτική αστυνομία κάνει περιπολίες από το σημείο σε κανονικά διαστήματα 2 ωρών. Όταν ο αστυνομικός δει ένα σταθμευμένο αυτοκίνητο το σημειώνει στο μπλοκ του και αν στην επόμενη επίσκεψή του το αυτοκίνητο είναι ακόμη εκεί του κόβει πρόστιμο.
Αν σταθμεύσετε το αυτοκίνητό σας σε αυτό το σημείο και επιστρέψετε μετά από 3 ώρες, ποια είναι η πιθανότητα να έχετε πάρει πρόστιμο;

ΑΣΚΗΣΗ 12. Ένα κατάστημα διατηρεί ένα συγκεκριμένο προϊόν σε απόθεμα για να εξυπηρετεί τους πελάτες του. Το κατάστημα κάνει παραγγελίες Q μονάδων του προϊόντος από τον προμηθευτή του. Η παραγγελία έρχεται χωρίς καθυστέρηση στο κατάστημα. Η ζήτηση για αυτό το προϊόν έρχεται σύμφωνα με μια ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσο χρόνο X που έχει συνάρτηση κατανομής $F_X(t)$ και μέση τιμή μ. Όταν πωληθεί και το τελευταίο κομμάτι που βρίσκεται στο κατάστημα γίνεται μια νέα παραγγελία Q μονάδων.
Το κατάστημα έχει τα παρακάτω κόστη: Το κόστος αγοράς του προϊόντος από τον προμηθευτή είναι ίσο με c ανά μονάδα προϊόντος. Επιπλέον, κάθε φορά που γίνεται μια παραγγελία υπάρχει ένα πρόσθετο σταθερό κόστος K ανεξάρτητο από την ποσότητα που παραγγέλλεται, και οφείλεται σε διαχειριστικά έξοδα, κόστη παράδοσης κλπ. Τέλος το προϊόν που βρίσκεται σε απόθεμα δημιουργεί στο κατάστημα ένα κόστος ίσο με h ανά μονάδα προϊόντος που βρίσκεται στην αποθήκη ανά μονάδα χρόνου (για παράδειγμα, αν στην αποθήκη υπάρχουν 3 μονάδες προϊόντος για χρονικό διάστημα 2 ημερών και το κόστος είναι $h = 5$ ανά μονάδα προϊόντος και ανά ημέρα, το συνολικό κόστος αποθέματος στη διάρκεια αυτών των 2 ημερών είναι ίσο με $2 \times 3 \times 5 = 30$.
(α) Υπολογίστε το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου σε μεγάλο ορίζοντα για τη διακίνηση αυτού του προϊόντος.
(β) Βρείτε την ποσότητα παραγγελίας που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου.
Υπόδειξη: Έστω $I(t)$ η ποσότητα προϊόντος που βρίσκεται σε απόθεμα στο κατάστημα τη χρονική στιγμή t. Δείξτε ότι η $\{I(t)\}$ είναι αναγγενητική διαδικασία και εφαρμόστε τα κατάλληλα οριακά θεωρήματα για το μέσο κόστος.