Επιχειρησιακή Έρευνα: Στοχαστικά Μοντέλα 2021-22
Σειρά Ασκήσεων 3: Ανανεωτικές Διαδικασίες και Διαδικασίες Poisson

ΑΣΚΗΣΗ 1. Δείξτε ότι για $n \in \mathbb{N}, \lambda > 0, t > 0$ ισχύει

$$\int_0^t x^{n-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \left[1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right].$$

Υπόδειξη: Συμπληρώστε το αριστερό μέλος της εξίσωσης έτσι ώστε να εμφανιστεί η πιθανότητα $P(S_n \le t)$, όπου S_n τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κατανομή Erlang(n, λ). Τώρα θεωρήστε μια διαδικασία Poisson με παράμετρο λ και εκφράστε την πιθανότητα $P(S_n \le t)$ συναρτήσει της αντίστοιχης πιθανότητας για την $N(t)$.

ΑΣΚΗΣΗ 2. Έστω τυχαία μεταβλητή $X \sim$ Erlang(n, λ) και μια τυχαία μεταβλητή $Y \sim$ Exp(μ) ανεξάρτητη της X. Να βρεθεί η πιθανότητα $P(X \le Y)$.

ΑΣΚΗΣΗ 3. Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t), t \ge 0\}$ της οποίας οι ενδιάμεσοι χρόνοι $X_1, X_2, \ldots$ έχουν συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le b \\ \lambda e^{-\lambda(x-b)}, & x > b \end{cases}$$

Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(N(t) \ge k)$ για $k \ge 1$.
Υπόδειξη: Δείξτε ότι ο ενδιάμεσος χρόνος X μπορεί να εκφραστεί ως $X = b + Y$, όπου $Y \sim Exp(\lambda)$ και χρησιμοποιήστε τη σχέση μεταξύ των κατανομών Erlang(k, λ) και Poisson(λt) (Άσκηση 1).

ΑΣΚΗΣΗ 4. Έστω ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με ενδιάμεσους χρόνους που ακολουθούν κατανομή Erlang(2,1), δηλαδή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(t) = te^{-t}, t \ge 0$. Δείξτε ότι

$$P(N(t) = n) = \frac{t^{2n+1} e^{-t}}{(2n+1)!} + \frac{t^{2n} e^{-t}}{(2n)!}.$$

Υπόδειξη: Εκφράστε την $\{N(t)\}$ συναρτήσει μιας διαδικασίας Poisson με ρυθμό 1.

ΑΣΚΗΣΗ 5. Έστω δύο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson $\{N_1(t)\}$ και $\{N_2(t)\}$, με ρυθμούς άφιξης λ_1 και λ_2, αντίστοιχα, και $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$.
Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:
(α) $P(N_1(t) = k_1, N_2(t) = k_2)$
(β) $P(N(t) = k)$
(γ) $P(N_1(t) = k_1 | N_1(t+s) = n_1)$, για $t, s > 0, k \ge 0, n_1 \ge k$.
(δ) $P(N_1(t) = k_1, N_2(t) = k_2 | N_1(t+s) = n_1, N_2(t+s) = n_2)$, για $t, s > 0, k_1, k_2 \ge 0, n_1 \ge k_1, n_2 \ge k_2$.
(ε) $P(N_1(t) = k_1, N_2(t) = k_2 | N1_(t+s) = n_1)$, για $t, s > 0, k_1, k_2 \ge 0, n_1 \ge k_1$.
(στ) $P(N_1(t) = k_1, N_2(t) = k_2 | N(t+s) = n)$, για $t, s > 0, k_1, k_2 \ge 0, n \ge k_1 + k_2$.

ΑΣΚΗΣΗ 6. Σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης οι πελάτες έρχονται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Αν ένας πελάτης βρει το σύστημα ελεύθερο τότε αρχίζει αμέσως η εξυπηρέτησή του. Ο χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη S είναι τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής $G(t)$ και μέση τιμή $E(S) = \frac{1}{\mu}$ και οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους και ανεξάρτητοι από τη διαδικασία αφίξεων. Ένας πελάτης που βρίσκει το σταθμό εξυπηρέτησης κατειλημμένο φεύγει χωρίς να εξυπηρετηθεί.
Υπολογίστε το μέσο αριθμό πελατών ανά μονάδα χρόνου που φεύγουν χωρίς να εξυπηρετηθούν σε μεγάλο ορίζοντα.

ΑΣΚΗΣΗ 7. Σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης όπως αυτό της προηγούμενης άσκησης υποθέστε ότι σε κάθε άφιξη έρχεται είτε ένας πελάτης μόνος του με πιθανότητα p είτε δύο πελάτες μαζί με πιθανότητα $1-p$. Αν το σύστημα είναι κατειλημμένο ο πελάτης ή οι πελάτες που φτάνουν φεύγουν χωρίς να περιμένουν. Αν είναι ελεύθερο τότε αρχίζει η εξυπηρέτηση. Αν έχουν έρθει δύο πελάτες τότε εξυπηρετούνται διαδοχικά ο ένας μετά τον άλλον με ανεξάρτητους χρόνους εξυπηρέτησης.
Υπολογίστε το μέσο αριθμό πελατών που φεύγουν χωρίς να εξυπηρετηθούν σε μεγάλο ορίζοντα.

ΑΣΚΗΣΗ 8. Σε μια αποθήκη βρίσκονται Q μονάδες ενός προϊόντος, $Q \in \mathbb{N}$. Η ζήτηση για αυτό το προϊόν έρχεται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και κάθε ζήτηση είναι για μια μονάδα προϊόντος. Το κατάστημα θα παραλάβει νέα ποσότητα προϊόντος μετά από χρόνο L που ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο μ. Αν το υπάρχον απόθεμα εξαντληθεί πριν έρθει η νέα ποσότητα, τυχόν μονάδες που θα ζητηθούν όσο το απόθεμα θα είναι μηδενικό καταγράφονται ως ελλείψεις.

Δείξτε ότι ο αναμενόμενος αριθμός ελλείψεων μέχρι την άφιξη της νέας ποσότητας προϊόντος είναι ίσος με $\left(\frac{\lambda}{\lambda+m}\right)^{Q+1}(1+\frac{\lambda}{\mu})$.

ΑΣΚΗΣΗ 9. Σε μια στάση λεωφορείου φτάνουν επιβάτες σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Όταν περάσει το λεωφορείο παίρνει όλους τους επιβάτες που περιμένουν στη στάση και αναχωρεί ακαριαία. Αν ένας επιβάτης φτάσει στη στάση τη χρονική στιγμή t και το λεωφορείο περάσει τη χρονική στιγμή $s > t$, ο επιβάτης έχει κόστος ίσο με $h(s-t)$, όπου h είναι το κόστος αναμονής ανά μονάδα χρόνου και ανά επιβάτη. Υπολογίστε το μέσο κόστος αναμονής όλων των επιβατών ανά μονάδα χρόνου στις παρακάτω περιπτώσεις:
(α) Αν ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών λεωφορείων είναι σταθερός και ίσος με T.
(β) Αν ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών λεωφορείων ακολουθεί κατανομή $F_T(t)$ με μέση τιμή $E(T) = a$.
(γ) Αν το λεωφορείο περνά αμέσως μόλις συγκεντρωθούν N επιβάτες στη στάση.

ΑΣΚΗΣΗ 10. Μια ασφαλιστική εταιρεία θέλει να εκτιμήσει το κόστος αποζημίωσης μελλοντικών ατυχημάτων. Τα ατυχήματα συμβαίνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ.Έστω ότι το κόστος αποζημίωσης κάθε ατυχήματος είναι σταθερό και ίσο με C. Η εταιρεία χρησιμοποιεί ένα κριτήριο αποπληθωρισμένου κόστους με συνεχή ρυθμό αποπληθωρισμού $\alpha > 0$, δηλαδή αν πληρώσει ένα κόστος A σε μια μελλοντική χρονική στιγμή t, τότε η παρούσα αξία αυτής της πληρωμής τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι ίση με $Ae^{-\alpha t}$.
(α) Υπολογίστε την αναμενόμενη παρούσα αξία του κόστους αποζημίωσης των n πρώτων ατυχημάτων μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$.
(β) Υπολογίστε την αναμενόμενη παρούσα αξία του κόστους αποζημίωσης των ατυχημάτων που θα συμβούν στο διάστημα $[0, t]$.