Μάθημα 1.

Βιβλίο Φακνου - στοχαστικά μοντέλα στην επιχειρησιακή έρευνα

Ενότητα 1 - Βασικά στοιχεία πιθανοτήτων

▶ Δεσμευμένη σπ και σππ

(X,Y) δισδιάστατη διακριτή τυχαία μεταβλητή

$f_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y)$ από κοινού σπ των X,Y

$f_X(x) = P(X=x) = \sum_y f_{X,Y}(x,y)$ περιθώρια σπ της X

$f_Y(y) = P(Y=y) = \sum_x f_{X,Y}(x,y)$ περιθώρια σπ της Y

$f_{X|Y}(x|y) = P(X=x|Y=y)$ δεσμευμένη σπ της X δεδομ ότι $Y=y$

Παράδειγμα 1

Ρίχνουμε ένα ζάρι. Αν Y το αποτέλεσμα του ζαριού, επιλέγουμε τυχαία και ομοιόμορφα έναν ακέραιο στο $\{1,\dots,Y\}$

Y: αποτέλεσμα ζαριού (1ο στάδιο)

X: αποτέλεσμα επιλογής αριθμού (2ο στάδιο)

$P(Y=3) = \frac{1}{6}$ και γενικά $f_Y(y) = \frac{1}{6}$ $\forall y \in \{1,\dots,6\}$

$P(X=1|Y=3) = 1/3$

(υπολογίζονται εύκολα γιατί αφορούν το πρώτο στάδιο)

$P(X=1)$, $P(X=1, Y=3)$ → υπολ δύσκολα γιατί αφορούν το δεύτερο

Ιδιότητα

- $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ δηλαδή

$f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y)$ δηλ

$P(X=x|Y=y) = P(X=x|Y=y) \cdot P(Y=y)$

$P(X=1, Y=3) = P(X=1|Y=3) \cdot P(Y=3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}.$

- $P(X=x) = \sum_y P(X=x, Y=y) = \sum_y P(X=x|Y=y) \cdot P_Y(y)$

$\xrightarrow{\text{θοπ}}$

$P(X=1) = \sum_{y=1}^{6} P(X=1|Y=y) \cdot P_Y(y) = \sum_{y=1}^{6} \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \sum_{y=1}^{6} \frac{1}{y} = \dots$

(X,Y) δισδιάστατη συνεχής τυχαία μεταβλητή

$f_{X,Y}(x,y)$ από κοινού σππ των X,Y

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$ περιθώρια σππ της X

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$ περιθώρια σππ της Y

$f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$, $f_{X|Y}$: δεσμευμένη σππ της X δεδ ότι $Y=y$

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y)\,dy.$

Δεσμευμένη μέση τιμή

$$E[X] = \begin{cases} \sum_x x F_X(x) = \sum_x x P(X=x) & , X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx & , X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

μέση τιμή
- αριθμός
- καλύτερη εκτίμηση για X.

X, Y ΤΜ και $f_Y(y) > 0$

$$E[X|Y=y] = \begin{cases} \sum_x x P(X=x|Y=y) = \sum_x x f_{X|Y}(x|y) & , X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y)\, dx & , X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

ισοδύναμα $m_{X|Y}(y)$

δεσμευμένη μέση τιμή
- αριθμός ως συνάρτηση του y
- καλύτερη εκτίμηση για X δεδ ότι Y=y

Στο παράδειγμα 1:

$$m_{X|Y}(y) = E[X|Y=y] = \sum_{x=1}^{y} x P(X=x|Y=y) = \sum_{x=1}^{y} x \frac{1}{y} = \frac{1}{y}\sum_{x=1}^{y} x = \frac{1}{y}\frac{y(y+1)}{2} = \frac{y+1}{2}$$

Παφορα ΤΜ 2ου σταδ

[Αν αντικαταστήσω την τιμή y με την ΤΜ Y, θα έχω

$m_{X|Y}(Y) = E[X|Y] = \frac{Y+1}{2}$ δεσμευμένη μέση τιμή της X δοθείσης Y είναι ΤΜ και συνάρτηση της Y.]

Θεώρημα Διπλής Μέσης Τιμής

$$E[X] = E[\underbrace{E[X|Y]}_{\text{ΤΜ συνάρτηση της Y.}}]$$

$$E[g(Y)] = \begin{cases} \sum_y g(y) f_Y(y) = \sum_y g(y) P(Y=y) & , Y \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) f_Y(y)\, dy & , Y \text{ συνεχής} \end{cases}$$

τύπος αφηρημένου στατιστικού

Επομένως, επειδή E[X|Y] συνάρτηση της Y εφαρμόζω για E[E(X|Y)]

Άρα $E[X] = E[E[X|Y]] = \begin{cases} \sum_{y} E[X|Y=y]\, P(Y=y) & , Y \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} E[X|Y=y]\, f_Y(y)\, dy & , Y \text{ συνεχής} \end{cases}$

Παράδειγμα 1

$E[X] = E[E(X|Y)] = \sum_{y=1}^{6} \underbrace{E[X|Y=y]}_{\frac{y+1}{2}} \underbrace{P(Y=y)}_{\frac{1}{6}} = \sum_{y=1}^{6} \frac{y+1}{12} = \frac{1}{12} \sum_{y=1}^{6} y+1$

X τμ 2ου σταδίου

$= \frac{1}{12}\left(\sum_{y=1}^{6} y + \sum_{y=1}^{6} 1 \right) = \frac{1}{12}\left(\frac{6 \cdot 7}{2} + 6 \right) = \ldots = \frac{9}{4}.$

Παράδειγμα 2.

Έστω $X_1, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τμ με $E(X_i) = \mu_X$, $Var[X_i] = \sigma_X^2$

Έστω N ακέραια τμ, ανεξάρτητη των X_i, $N \geq 0$, $E[N] = \mu_N$, $Var(N) = \sigma_N^2$

Αν $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ (τυχαίο αθροισμα), $E[S_n], Var(S_n) = ?$

Υπενθύμιση 1. $E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} n P(N=n)$, 2. $E(N^2) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P(N=n)$

3. $var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y)$, 4. $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ ισχύει πάντα

5. $E(X \cdot Y) = E(X)E(Y)$ αν X, Y ανεξ

Λύση $E[S_N] = E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] \overset{*}{=} E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i | N\right]\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i | N=n\right] P(N=n)$

(*) δεν εφαρμόζω την ιδιότητα 4 γιατί δεν έχω σταθ άθροισμα

$= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \cdot P(N=n) = P(N=n) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

N ανεξ των Xi
άρα φεύγει η δέσμευση

$= P(N=n) \sum_{n=0}^{\infty} n \mu_X = P(N=n) \mu_X \sum_{n=0}^{\infty} n = \mu_X \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} n P(N=n)}_{E(N)} = \mu_X \cdot \mu_N$