Μάθημα 3

5) $X \sim Poisson(\lambda)$

$$f_X(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$P_X(z) = \sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) z^x = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} z^x = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda z} =$$

$$e^{-\lambda(1-z)}$$

6) $X \sim Uniform(\{0, 1, \dots, n-1\})$

$$f_X(x) = P(X = x) = \frac{1}{n}, \quad x = 0, 1, \dots, n-1.$$

$$P_X(z) = \sum_{x=0}^{n-1} f_X(x) z^x = \sum_{x=0}^{n-1} \frac{1}{n} z^x = \frac{1}{n} \sum_{x=0}^{n-1} z^x = \frac{1}{n} \frac{1 - z^n}{1 - z}, \quad z \in \mathbb{R}$$

Αντιστροφή πιθανογεννητριών

Γνωρίζω $P_X(z)$ → Βρίσκω $f_X(k) = P(X=k)$

Αν $P_X(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)}$ όπου N, D πολυώνυμα, τότε είναι δυνατή η αντιστροφή

1ο βήμα: Παραγοντοποιώ τον παρανομαστή

2ο βήμα: Προσδιορίζω άγνωστες σταθερές χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες

- $P_X(1) = 1$
- Οι ρίζες του παρανομαστή στο $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ είναι και ρίζες του παρανομαστή

3ο βήμα: Κάνω ανάλυση σε απλά κλάσματα

4ο βήμα: Γράφω κάθε απλό κλάσμα σαν δυναμοσειρά

Παράδειγμα 1 $P_X(z) = \dfrac{az+b}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}$, $P(X=k) = ?$

Λύση: 1ο βήμα: $z^2 - \frac{5}{2}z + 1 = (z-2)(z-\frac{1}{2})$

Άρα $P_X(z) = \dfrac{az+b}{(z-2)(z-\frac{1}{2})}$

2ο βήμα: • $P_X(1) = 1 \Rightarrow \dfrac{a+b}{-\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow a+b = -\frac{1}{2}$ (1)

• $\frac{1}{2}$ ρίζα του παρανομαστή, $|\frac{1}{2}| \leq 1$ $\Bigg\}$ $\frac{1}{2}$ ρίζα του αριθμητή δηλ. $a\frac{1}{2} + b = 0$ (2)

(1), (2) $a = -1$, $b = \frac{1}{2}$ Άρα $P_X(z) = \dfrac{-z + \frac{1}{2}}{(z-2)(z-\frac{1}{2})} = -\dfrac{1}{z-2}$

$\Rightarrow P_X(z) = \dfrac{1}{2-z}$

3ο βήμα: για αυτό το παράδειγμα οκ

4ο βήμα: θέλω να την φέρω στη μορφή της γεωμ. → $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} p^k = \dfrac{1}{1-p}}$

$$P_X(z) = \frac{1}{2-z} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k, \quad \left|\frac{z}{2}\right| < 1.$$

θέλω να γίνει 1.

θέλω να γίνει 1.

Αυτή που προκύπτει, θέλω να την φέρω στην μορφή $\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) z^k$.

Έτσι, $$P_X(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}_{P(X=k)} z^k$$

Άρα $P(X=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$, $k=0,1,2,\dots$

Παράδειγμα 2 $\quad P_X(z) = \dfrac{c-15z}{51-63z+18z^2}$, $P(X=k)=?$

Βήμα 1ο: $51-63z+18z^2 = 18\left(z^2-\frac{7}{2}z+3\right) = 18\left(z-\frac{3}{2}\right)(z-2)$

Βήμα 2ο: $P_X(1)=1 \Rightarrow \dfrac{c-15}{18\left(1-\frac{3}{2}\right)(1-2)} = 1 \Rightarrow \dfrac{c-15}{9} = 1 \Rightarrow c=24$

Άρα $$P_X(z) = \frac{24-15z}{18\left(z-\frac{3}{2}\right)(z-2)}.$$

Βήμα 3ο:

(1) $$\frac{24-15z}{18\left(z-\frac{3}{2}\right)(z-2)} = \frac{A}{z-\frac{3}{2}} + \frac{B}{z-2} \xRightarrow{\cdot\left(z-\frac{3}{2}\right)}$$

$$\frac{24-15z}{18(z-2)} = A + \frac{B\left(z-\frac{3}{2}\right)}{z-2} \xRightarrow{z=\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\frac{3}{2}}{-9} = A \Rightarrow \boxed{A=-\frac{1}{6}}$$

(1) $\xRightarrow{\cdot(z-2)}$ $$\frac{24-15z}{18\left(z-\frac{3}{2}\right)} = \frac{A(z-2)}{z-\frac{3}{2}} + B \xRightarrow{z=2}$$

$$\frac{-6}{18\cdot\frac{1}{2}} = B \Rightarrow \boxed{B=-\frac{2}{3}}$$

$$P_X(z) = \frac{-\frac{1}{6}}{z-\frac{3}{2}} + \frac{-\frac{2}{3}}{z-2}$$

Βήμα 4ο: $$P_X(z) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{2}-z} + \frac{\frac{2}{3}}{2-z} = \frac{\frac{2}{3}\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}-z\right)} + \frac{\frac{1}{2}\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}(2-z)} =$$

$$\frac{\frac{2}{18}}{1-\frac{2}{3}z} + \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}z} = \frac{1}{9}\frac{1}{1-\frac{2}{3}z} + \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z} = \frac{1}{9}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}z\right)^k + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z\right)^k.$$

$$= \frac{1}{9}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k z^k + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\left[\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^k + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]}_{P(X=k)} z^k$$

Άρα $P(X=k) = \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^k + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

Μετασχηματισμός Laplace Stieltjes (LST)

ολοκλήρωμα Riemann

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$ διαμέριση του $[a,b]$

Κάτω ολοκλήρωμα Riemann της f:
$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{\substack{\text{διαμέρ.}\\ \text{του }[a,b]}} \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)\cdot(t_i-t_{i-1})$$

Άνω ολοκλήρωμα Riemann της f
$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{\substack{\text{διαμερ}\\ \text{του }[a,b]}} \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)\cdot(t_i-t_{i-1})$$

Αν $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και το ολοκλήρωμα Riemann είναι $\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$ διαμέριση του $[a,b]$ και $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ αύξουσα.

Κάτω ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes της f ως προς φ:
$$\underline{\int_a^b} f(x)d\varphi(x) = \sup_{\substack{\text{διαμερ}\\ \text{του }[a,b]}} \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)\cdot(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})).$$

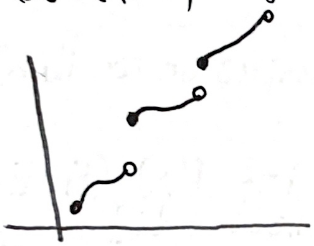
Άνω ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes της f ως προς φ:
$$\overline{\int_a^b} f(x)d\varphi(x) = \inf_{\substack{\text{διαμερ}\\ \text{του }[a,b]}} \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)\cdot(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))$$

Αν $\underline{\int_a^b} f(x)d\varphi(x) = \overline{\int_a^b} f(x)d\varphi(x)$, η f είναι Riemann-Stieltjes ολοκληρώσιμη και το ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes είναι το

$$\int_a^b f(x)d\phi(x) = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)d\phi(x) = \int_a^{\bar{b}} f(x)d\phi(x)$$

Βασική σχέση:

Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ αύξουσα, κατά τμήματα συνεχής, δεξιά συνεχής, παραγωγίσιμη σε κάθε διάστημα συνέχειας



Τότε η f είναι R-S ολοκληρώσιμη ως προς φ και ισχύει ότι

$$\boxed{\int_a^b f(x)d\phi(x) = \sum_{x} f(x)[\varphi(x)-\varphi(x^-)] + \int_a^b f(x)\phi'(x)dx}$$

x: σημεία ασυνέχειας

φ: συνάρτηση κατανομής

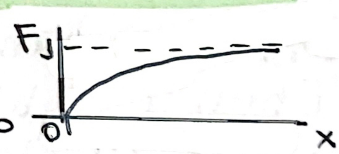
σημεία ασυνέχειας: σε μικτές και διακριτές τυχαίες μεταβλητές

$\varphi(x)-\varphi(x^-)$: άλματα της ϕ στο x

Μέση τιμή τμ ως ολοκλήρωμα R-S

Έστω X τμ συνεχής/διακριτή/μικτή με συνάρτηση κατανομής $F_X(x)=P(X\le x)$. Τότε αν g συνεχής, $\boxed{E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dF_X(x)}$

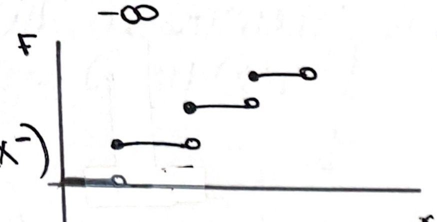
Πράγματι,



▶ Αν X συνεχής, σππ $f_X(x) = F'_X(x)$

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)F'_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dF_X(x)$$

▶ Αν X διακριτή με σπ $f_X(x) = P(X=x) = F_X(x)-F_X(x^-)$



$$E(g(x)) = \sum_x g(x)f_X(x) = \sum_x g(x)P(X=x) = \sum_x g(x)[F_X(x)-F_X(x^-)]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dF_X(x)$$ αφού $\int_a^b g(x)F'_X(x) = 0$ αφού $F'_X(x)=0$.