Μαθημα 5ο

$(1) \xrightarrow{\cdot(\lambda+s)} \frac{\lambda\mu}{\mu+s} = A + \frac{B(\lambda+s)}{\mu+s} \xrightarrow{s=-\lambda} \boxed{\frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda} = A}$

$(1) \xrightarrow{\cdot(\mu+s)} \frac{\lambda\mu}{\lambda+s} = \frac{A(\mu+s)}{\lambda+s} + B \xrightarrow{s=-\mu} \boxed{\frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu} = B}$

Άρα $\tilde{F}_Z(s) = \frac{\frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}}{\lambda+s} + \frac{\frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}}{\mu+s} =$

$\frac{\mu}{\mu-\lambda} \cdot \underbrace{\frac{\lambda}{\lambda+s}}_{\text{LST της } exp(\lambda)} + \frac{\lambda}{\lambda-\mu} \cdot \underbrace{\frac{\mu}{\mu+s}}_{\text{LST της } exp(\mu)} = \frac{\mu}{\mu-\lambda} \underbrace{(1-e^{-\lambda z})}_{\text{σκ της } exp(\lambda)} + \frac{\lambda}{\lambda-\mu} \underbrace{(1-e^{-\mu z})}_{\text{σκ της } exp(\mu)}$

Εκθετική κατανομή

$X \sim exp(\lambda)$ [συνήθως χρόνος μέχρι να γίνει κάτι πχ χρόνος ζωής/ εξυπηρέτησης / μεταξύ γεγονότων]

συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

συνάρτηση κατανομής $F_X(t) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}_X(t) = P(X>t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - F_X(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 1, & t < 0. \end{cases}$

LST $\tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$

▶ $E(X^n) = (-1)^n \tilde{F}_X^{(n)}(0)$

• $\tilde{F}_X'(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)' = (\lambda \cdot (\lambda+s)^{-1})' = \lambda(-1)(\lambda+s)^{-2}$

• $\tilde{F}_X''(s) = (\lambda(-1)(\lambda+s)^{-2})' = \lambda(-1)(-2)(\lambda+s)^{-3}$

⋮

$\boxed{\tilde{F}_X^{(n)}(s) = \lambda(-1)^n n!(\lambda+s)^{-(n+1)}}$

Άρα $E[X^n] = (-1)^n \tilde{F}_X^{(n)}(0) = (-1)^n \lambda (-1)^n n! (\lambda+0)^{-(n+1)} = \dfrac{n!\,\lambda}{\lambda^{n+1}}$

$$\Rightarrow \boxed{E[X^n] = \frac{n!}{\lambda^n}}$$

$\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda}}$

$\boxed{Var(X)} = E(X^2) - E^2(X) = \dfrac{2}{\lambda^2} - \left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^2 = \boxed{\dfrac{1}{\lambda^2}}$

Σχόλιο: Αν έχουμε ένα περιοδικό φαινόμενο με ενδιάμεσους χρόνους εκθετικούς ($\sim exp(\lambda)$) τότε

$E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$: περίοδος $\qquad \lambda = \dfrac{1}{E(X)}$: συχνότητα/ρυθμός

Ιδιότητες της εκθετικής

1 **Αμνήμονη ιδιότητα**: $X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow P(X-s>t \mid X>s) = P(X>t)$, $t \geq 0$

Απόδειξη: $P(X-s>t \mid X>s) = \dfrac{P(X-s>t, X>s)}{P(X>s)} =$

$\dfrac{P(X>t+s)}{P(X>s)} = \dfrac{\overline{F}_X(t+s)}{\overline{F}_X(s)} = \dfrac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t}$.

επειδή, $P(X>t) = \overline{F}_X(t) = e^{-\lambda t}$

Άρα πράγματι $P(X-s>t \mid X>s) = P(X>t)$ ∎

Ερμηνεία: Αν X χρόνος ζωής μηχανής, η αμνήμονη ιδιότητα λέει ότι η δεσμευμένη πιθανότητα να λειτουργήσει άλλες t χρονικές μονάδες δεδομένου ότι έχει ήδη λειτουργήσει s χρονικές μονάδες είναι ίση με την πιθανότητα να λειτουργήσει τουλάχιστον t μονάδες όταν είναι καινούργια

2. **Ιδιότητα κλίμακας.**

$$\left.\begin{array}{l} X \sim exp(\lambda) \\ Y = aX,\ a>0 \text{ σταθερά} \end{array}\right\} Y \sim exp\left(\frac{\lambda}{a}\right)$$

Απόδειξη

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX \leq y) = P(X \leq \frac{y}{a}) = F_X\left(\frac{y}{a}\right) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \frac{y}{a}}, & y \geq 0 \\ 0, & y<0 \end{cases}$

Άρα $Y \sim Exp\left(\frac{\lambda}{a}\right)$ ∎

3) Ισχυρή αμνήμονη ιδιότητα

$$\left.\begin{array}{l} X \sim Exp(\lambda) \\ Y \geq 0 \\ X, Y \text{ ανεξ} \end{array}\right\} \quad P(X-Y>t \mid X>Y) = P(X>t) \quad \forall t>0$$

Απόδειξη SOS

$$P(X-Y>t \mid X>Y) = \frac{P(X-Y>t, X>Y)}{P(X>Y)} = \frac{P(X>Y+t)}{P(X>Y)} \quad (1)$$

ⓐ ▶ $P(X>Y) \xrightarrow[\text{δεσμευση ως προς } Y]{\text{ΘΟΠ}} \begin{cases} \sum_{Y} P(X>Y \mid Y=y) P(Y=y) & , Y \text{ διακριτή} \\ \int_0^{+\infty} P(X>Y \mid Y=y) f_Y(y)\,dy & , Y \text{ συνεχής} \end{cases}$

$$= \int_0^{+\infty} P(X>Y \mid Y=y)\, dF_Y(y) =$$

$$\int_0^{+\infty} P(X>y)\, dF_Y(y) = \int_0^{+\infty} \overline{F}_X(y)\, dF_Y(y) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y}\, dF_Y(y) = \tilde{F}_Y(\lambda)$$

ⓑ ▶ $P(X>Y+t) = \int_0^{+\infty} P(X>Y+t \mid Y=y)\, dF_Y(y) = \int_0^{+\infty} P(X>y+t)\, dF_Y(y)$

$$= \int_0^{+\infty} \overline{F}_X(t+y)\, dF_Y(y) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(t+y)}\, dF_Y(y) =$$

$$= e^{-\lambda t} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda y}\, dF_Y(y) = e^{-\lambda t}\, \tilde{F}_Y(\lambda)$$

Άρα από (1) $\xRightarrow{(\alpha),(\beta)}$ $P(X-Y>t \mid X>Y) = \dfrac{e^{-\lambda t}\, \tilde{F}_Y(\lambda)}{\tilde{F}_Y(\lambda)} = e^{-\lambda t} = P(X>t)$

4) Ιδιότητα min

$$\left.\begin{array}{l} X_1, X_2, \dots, X_n \text{ ανεξάρτ.} \\ X_i \sim Exp(\lambda_i) \quad i=1,2,\dots,n \end{array}\right\} \quad Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \sim exp(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$$

Απόδειξη: για $t>0$

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq t) = 1 - P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) > t)$$

$$= 1 - P(X_1>t, X_2>t, \dots, X_n>t) \xlongequal[\text{ανεξαρτ.}]{X_1, X_2, \dots X_n} 1 - P(X_1>t) \cdots P(X_n>t)$$

$1-e^{-\lambda_1 t}e^{-\lambda_2 t}\cdots e^{-\lambda_n t}=1-e^{-(\lambda_1+\dots+\lambda_n)t} \Rightarrow Y\sim exp(\lambda_1+\dots+\lambda_n)$

5) Ιδιοτητα δειχτη min

$X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ.
$X_i \sim Exp(\lambda_i), i=1,\dots,n$
$N: \{N=i\}=\{\min(X_1,\dots,X_n)=X_i\}$

$\Bigg\}\ P(N=i)=\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n}$

Αποδειξη

$P(N=i)=P(\min(X_1,\dots,X_n)=X_i)=P(X_1>X_i, X_2>X_i,\dots,X_{i-1}>X_i,\dots X_n>X_i)=\int_0^{+\infty}P(X_1>X_i, X_2>X_i,\dots,X_{i-1}>X_i, X_{i+1}>X_i\dots X_n>X_i|X_i=t)\,dF_{X_i}(t)$

$=\int_0^{+\infty}P(X_1>X_i, X_2>X_i,\dots,X_{i-1}>X_i, X_{i+1}>X_i,\dots,X_n>X_i|X_i=t)\cdot f_{X_i}(t)dt$

$=\int_0^{+\infty}P(X_1>t, X_2>t,\dots,X_n>t)\cdot \lambda_i e^{-\lambda_i t}dt \overset{X_1,\dots,X_n}{\underset{\text{ανεξ}}{=}}$

$\int_0^{+\infty}P(X_1>t)\cdot P(X_2>t)\cdots P(X_n>t)\lambda_i e^{-\lambda_i t}dt=$

$\int_0^{+\infty}e^{-\lambda_1 t}e^{-\lambda_2 t}\cdots e^{-\lambda_{i-1}t}e^{-\lambda_{i+1}t}\cdots e^{-\lambda_n t}\lambda_i e^{-\lambda_i t}dt$

$=\lambda_i\int_0^{+\infty}e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)t}dt=\lambda_i\left[\dfrac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)}}{-(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)}\right]_0^{+\infty}$

$=\lambda_i\left(0-\dfrac{1}{-(\lambda_1+\dots+\lambda_n)}\right)=\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1+\dots+\lambda_n}$ ∎

6) Ιδιοτητα ανεξαρτησιας min και δειχτη min

$X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ.
$X_i \sim exp(\lambda_i)\ i=1,2,\dots$
$N=\{N=i\}=\{\min(X_1,\dots,X_n)=X_i\}$

Τοτε N, $\min(X_1,\dots,X_n)$ ανεξαρτητες μεταβλητες

Αποδειξη

Αρκει να δειξουμε οτι $P(N=i,\min(X_1,\dots,X_n)>t)=P(N=i)\cdot P(\min(X_1,\dots,X_n)>t)$

Έχουμε $P(N=i, \min(X_1,\dots,X_n)>t) = P(X_1>X_i, X_2>X_i, \dots, X_{i-1}>X_i, X_i>t, X_{i+1}>X_i, \dots)$

<u>Δεσμευση</u> ως προς X_i

$$\int_0^{+\infty} P(X_1>X_i, \dots, X_{i-1}>X_i, X_{i+1}>X_i, \dots, X_n>X_i \mid X_i=s) \cdot P(X_i=s)\,ds$$

$$= \int_0^{+\infty} P(X_1>X_i, \dots, X_{i-1}>X_i, X_{i+1}>X_i, \dots, X_n>X_i \mid X_i=s) \cdot \lambda_i e^{-\lambda_i s}\,ds$$

<u>όμοια</u> με ίδιους

$$\frac{\lambda_i\, e^{-(\lambda_1+\dots+\lambda_n)t}}{\lambda_1+\dots+\lambda_n} = \underbrace{\frac{\lambda_i}{\lambda_1+\dots+\lambda_n}}_{P(N=t)} \cdot \underbrace{e^{-(\lambda_1+\dots+\lambda_n)t}}_{P(\min(X_1,\dots,X_n)>t)} \quad \blacksquare$$