Μάθημα 8.

$F_X(\infty) = \lim_{t\to\infty} F_X(t) = P(X_n<\infty)$: $n=1,2,3,\dots$ πιθανότητα ο ενδιάμεσος χρόνος να είναι πεπερασμένος

$N(\infty) = \lim_{t\to\infty} N(t) = \#$ γεγονότων στο $(0,\infty)$

Θεώρημα

$\{N(t): t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία
F_X σ.κ. των ενδιάμεσων χρόνων

οι ανανεώσεις συμβαίνουν σίγουρα σε πεπερ. χρόνο

Αν $F_X(\infty)=1 \Rightarrow P(N(\infty)=\infty)=1$

έχω ∞ ανανεώσεις στο $(0,+\infty)$

υπάρχει θετική πιθανότητα ο χρόνος ανανέωσης να είναι ∞

Αν $F_X(\infty)<1 \Rightarrow P(N(\infty)=k) = (F_X(\infty))^k (1-F_X(\infty))$, $k=0,1,2,\ldots$

Θεώρημα [Νόμος Μεγάλων Αριθμών για ανανεωτική διαδικασία]

$\{N(t), t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία
$E[X_n]=\mu>0$, $n=1,2,\ldots$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu} \text{ με πιθ } 1.$$

μέσος χρόνος μεταξύ γεγονότων δηλ περίοδος

μακροπρόθεσμη συχνότητα ανανεώσεων = μακροπρόθεσμος ρυθμός γεγονότων = μακροπρόθεσμος αριθμός γεγονότων ανά μονάδα χρόνου.

Θεώρημα [Στοιχειώδες Ανανεωτικό Θεώρημα]

$\{N(t), t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία
$E(X_n)=\mu>0$ $n=1,2,\ldots$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[N(t)]}{t} = \frac{1}{\mu}$$

μακροπρόθεσμη μέση συχνότητα = μακροπρόθεσμος μέσος αριθμός γεγονότων ανά μονάδα χρόνου

Παράδειγμα

α) Μηχανή αντικαθίσταται με ίδια μόλις χαλάσει. Ο χρόνος ζωής της μηχανής είναι $L \sim Unif(2,5)$

β) Μηχανή αντικαθίσταται με ίδια μόλις χαλάσει ή περάσει χρόνος 3 ημερών (ό,τι συμβεί πρώτο). Ο χρόνος ζωής της μηχανής είναι $L \sim Unif(2,5)$

Στις παραπάνω περιπτώσεις να βρεθούν:

i) μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός αντικαταστάσεων: P_1

ii) μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός αντικαταστάσεων λόγω βλάβης: P_2

Λύση:

α) Έχουμε ανανεωτική διαδικασία $\{N(t): t \geq 0\}$ όπου
$N(t) = \#$ αντικαταστάσεων στο $(0,t)$ με ενδιάμεσους χρόνους
$\{X_n : n \geq 1\}$ όπου $X_n = L \sim Unif(2,5)$

ι) $P_1 = \lim_{t\to\infty} \frac{E(N(t))}{t} \overset{\Sigma A \Theta}{=} \frac{1}{E(X_n)} = \frac{1}{E(L)} = \frac{1}{\frac{2+5}{2}} = \frac{2}{7}$

ιι) $P_2 = P_1$ γιατί κάθε αντικατάσταση γίνεται λόγω βλάβης

β) Κάθε φορά που γίνεται αντικατάσταση, ο χρόνος μέχρι την επόμενη θα είναι $X_n = \min(L, 3)$, $L \sim Unif(2,5)$
Έχουμε ανανεωτική διαδικασία, $\{N(t), t \geq 0\}$ με $N(t) = \#$ αντικαταστάσεων στο $(0,t)$
Η $\{N(t), t \geq 0\}$ έχει ενδιάμεσους χρόνους $X_n = \min(1,3)$, $n = 1,2,\ldots$

ι) $P_1 = \lim_{t\to\infty} \frac{E(N(t))}{t} \overset{\Sigma A \Theta}{=} \frac{1}{E(X_n)} = \frac{6}{17}$ αφού,

$$E(X_n) = E(\min(L,3)) = \underbrace{E(\min(L,3) \mid L \leq 3)}_{E(L \mid L \leq 3)} \cdot P(L \leq 3) + \overbrace{E(\min(L,3) \mid L > 3)}^{E(3 \mid L > 3)} \cdot P(L > 3)$$

$$= 2{,}5 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{6} + \frac{12}{6} = \frac{17}{6}$$

2 3 4 5

ιι) $P_2 =$ μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός αντικαταστάσεων λόγω βλάβης

Θεωρούμε νέα διαδικασία: $N_1(t) = \#$ αντικαταστάσεων λόγω βλάβης

$\{N_1(t): t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία γιατί για ενδιάμεσο χρόνο
$Y_n =$ ενδιάμεσος χρόνος αντικατάστασης λόγω βλάβης
$\{Y_n : n \geq 1\}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων μεταβλητών

$P_2 = \lim_{t\to\infty} \frac{E(N_2(t))}{t} \overset{\Sigma A \Theta}{=} \frac{1}{E(Y_n)} = \frac{2}{17}$ αφού,

μετά από βλάβη, κατευθ. βλάβη

$$E(Y_n) = \underbrace{E(Y_n \mid L \leq 3)}_{E[L \mid L < 3] = 2{,}5} \underbrace{P(L \leq 3)}_{\frac{1}{3}} + \underbrace{E(Y_n \mid L > 3)}_{3 + E(Y_n)} \underbrace{P(L > 3)}_{\frac{2}{3}}$$

$$E(Y_n) = 2{,}5 \cdot \frac{1}{3} + (3 + E(Y_n))\frac{2}{3} \Rightarrow E(Y_n) = \frac{5}{6} + 2 + \frac{2}{3} E(Y_n)$$

$$\frac{E(Y_n)}{3} = \frac{17}{6} \Rightarrow E(Y_n) = \frac{17}{2}$$

Ανανεωτική εξίσωση - Λύση

Ανανεωτικός συλλογισμός: Όταν θέλω να υπολογίσω μια πιθανοθεωρητική ποσότητα που σχετίζεται με μια ανανεωτική διαδικασία

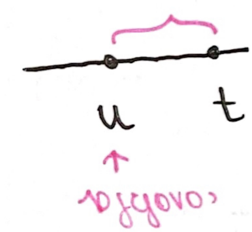
πχ $E(f(N(t)))$ ή $P(N(t)\in A)$ δεσμεύω ως προς τον χρόνο του 1ου γεγονότος

όταν το κάνω αυτό παίρνω μια ανανεωτική διαδικασία.

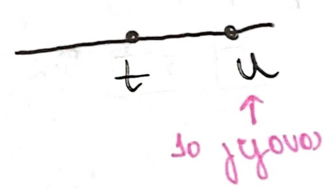
$E(N(t)) = m(t)$

$$E(N(t)) = \int_0^\infty E(N(t)\mid S_1=u)\,dF_{S_1}(u) \overset{S_1=X_1}{=\!=} \int_0^\infty E(N(t)\mid S_1=u)\,dF_X(u)$$

Αν $u\le t$, $E(N(t)\mid S_1=u) = 1 + E[N(t-u)]$
$= 1 + m(t-u)$



Αν $u>t$, $E(N(t)\mid S_1=u) = 0$.



Άρα $E(N(t)) = \int_0^\infty E(N(t)\mid S_1=u)\,dF_X(u) =$

$$\int_0^t (1+m(t-u))\,dF_X(u) + \int_t^\infty 0\,dF_X(u) =$$

$$\underbrace{\int_0^t 1\,dF_X(u)}_{F_X(t)} + \underbrace{\int_0^t m(t-u)\,dF_X(u)}_{(m*F_X)(t)}$$

ανανεωτική εξίσωση:

δηλαδή $\boxed{m(t) = F_X(t) + (m*F_X)(t)}$

άγνωστη συνάρτηση — γνωστή συνάρτηση — συνέλιξη της άγνωστης του 1ου μέλους με κάποια γνωστή

Σημείωση: η γνωστή και η γνωστή της συνέλιξης δεν ταυτίζονται απαραίτητα

Εφαρμόζω μετασχηματισμό LST

$$\tilde{m}(s) = \tilde{F}_X(s) + \tilde{m}(s)\tilde{F}_X(s) \Rightarrow \tilde{m}(s)(1-\tilde{F}_X(s)) = \tilde{F}_X(s) \Rightarrow \tilde{m}(s) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1+\tilde{F}_X(s)}$$