Μάθημα 9

Ανανεωτικη εξίσωση για $E[(N(t))^2]$ - παράδειγμα

Εστω $\{N(t): t\geq 0\}$ ανανεωτικη διαδικασια με κατανομη ενδιαμεσων χρονων $F_X(t)$. Να βρεθει η ανανεωτικη εξίσωση για την $h(t)=E[(N(t))^2]$

Λυση

$$h(t)=E[(N(t))^2] = \int_0^{\infty} [E[(N(t))^2] \mid S_1 = u] dF_X(u)$$

▷ Αν $u\leq t$: $E[(N(t))^2 \mid S_1=u] = E[(1+N(t-u))^2] =$

$E[1+2N(t-u)+N^2(t-u)] = 1+2E(N(t-u))+E[N(t-u)^2] =$

$1+2m(t-u)+h(t-u)$

▷ Αν $u>t$: $E[(N(t))^2 \mid S_1=u]=0$

Τελικά, $h(t) = \int_0^{\infty} [E[(N(t))^2] \mid S_1=u] dF_X(u) =$

$$\int_0^t (1+2m(t-u)+h(t-u)) dF_X(u) + \int_t^{+\infty} 0 \, dF_X(u) =$$

$$\int_0^t dF_X(u) + 2\int_0^t m(t-u) dF_X(u) + \int_0^t h(t-u) dF_X(u) =$$

$$\underbrace{F_X(t) + 2(m * F_X)(t)}_{\text{γνωστη συνάρτηση}} + \underbrace{(h * F_X)(t)}_{\text{συνελιξη αγνωστης με γνωστη συναρτηση κατανομης}}$$

Δηλαδη, η παραπανω αποτελει ανανεωτικη εξίσωση για την $h(t)$.

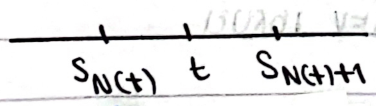
Παραδειγμα: Ανανεωτικη εξίσωση και λυση για $h(t)=E(S_{N(t)+1})$.

Εστω $\{N(t): t\geq 0\}$ ανανεωτικη διαδικασία με κατανομη ενδιάμεσων χρόνων $F_X(t)$.

(i) Τι ερμηνεια εχουν οι $S_{N(t)}$, $S_{N(t)+1}$

(ii) Να βρεθει ανανεωτικη εξίσωση για την $E[S_{N(t)+1}]$

(iii) Να λυθει η ανανεωτικη εξίσωση

(i) 

▶ $S_{N(t)}$: χρόνος τελευταιου γεγονοτος ως τη στιγμη t

▶ $S_{N(t)+1}$: χρονος του γεγονότος μετα τη στιγμη t.

(ii) $h(t) = E[S_{N(t)+1}] = \int_0^\infty E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u]\, dF_X(u)$

Αν $u \le t$: $E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u] = u + E[S_{N(t-u)+1}] = u + h(t-u)$

Αν $u > t$: $E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u] = u$

Άρα $h(t) = \int_0^\infty E[S_{N(t)+1} \mid S_1 = u]\, dF_X(u) = \int_0^t (u + h(t-u))\, dF_X(u) + \int_t^\infty u\, dF_X(u)$

$$= \int_0^t u\, dF_X(u) + \int_0^t h(t-u)\, dF_X(u) + \int_t^\infty u\, dF_X(u) =$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty u\, dF_X(u)}_{E(X)=\mu} + (h * F_X)(t) \quad \text{δηλαδή}$$

$$\boxed{\int_0^t 1\, dF_X(u) = F_X(t) \qquad \int_0^\infty u\, dF_X(u) = E(X)}$$

$$h(t) = \underbrace{\mu}_{\text{γνωστή συνάρτηση}} + \underbrace{(h * F_X)(t)}_{\text{συνέλιξη άγνωστης με γνωστή σκ}} \rightarrow \text{ανανεωτική εξίσωση}$$

(iii) $h(t) = \mu + (h * F_X)(t) \xrightarrow{LST} \tilde{h}(s) = \mu + \tilde{h}(s) \cdot \tilde{F}_X(s) \Rightarrow$

$\tilde{h}(s)(1 - \tilde{F}_X(s)) = \mu \Rightarrow \tilde{h}(s) = \mu \dfrac{1}{1 - \tilde{F}_X(s)} = \mu \left(1 + \dfrac{\tilde{F}_X(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)}\right)$

$\Rightarrow \tilde{h}(s) = \mu(1 + \tilde{m}(s)) \Rightarrow \tilde{h}(s) = \mu + \mu \tilde{m}(s) \xrightarrow{\text{αντίστροφη LST}}$

$h(t) = \mu + \mu\, m(t)$ $\quad \boxed{\text{LST της } m(t): \frac{\tilde{F}_X(s)}{1-\tilde{F}_X(s)}}$

Δηλαδή $E[S_{N(t)+1}] = \mu(1 + m(t)) = \mu(1 + E(N(t)))$

$E[S_{N(t)+1}]$: μέσος χρόνος μέχρι το γεγονός μετά την t δηλαδή το $N(t)+1$.

μ: μέσος ενδιάμεσος χρόνος γεγονότων

$1 + E(N(t))$: $E(N(t)+1)$

Παρατήρηση:

Ομοίως θα έπρεπε $E[S_{N(t)}] = \mu E(N(t))$ που δεν ισχύει.

Θεώρημα **Λύση Ανανεωτικής Εξίσωσης**
Έστω $\{N(t): t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία με κατανομή ενδιαμέσων χρόνων $F_X(t)$ και ανανεωτική συνάρτηση $m(t) = E[N(t)]$. Τότε η λύση της ανανεωτικής εξίσωσης $h(t) = d(t) + (h * F_X)(t)$ είναι η $h(t) = d(t) + (d * m)(t)$

Απόδειξη
Γνωρίζουμε ότι $m(t) = F_X(t) + (m * F_X)(t)$ ①
Έχουμε $h(t) = d(t) + (h * F_X)(t)$ ②
Θέλουμε να δείξουμε ότι $h(t) = d(t) + (d*m)(t)$ επαληθεύει τη ②
Έχουμε $d(t) + (d*m)(t) = d(t) + ((d + d*m) * F_X(t) \Rightarrow$
$d(t) + (d*m)(t) = d(t) + (d * (F_X + m * F_X))(t) \overset{①}{\Longrightarrow}$
$d(t) + (d*m)(t) = d(t) + (d*m)(t)$ ■

Βασικό Ανανεωτικό Θεώρημα
Ορισμός [Περιοδική τμ] Μια τμ X λέγεται περιοδική αν υπάρχει $p > 0$:
$P(X \in \{0, p, 2p, 3p, \dots\}) = 1 \iff \sum_{k=0}^{\infty} P(X = kp) = 1.$

Το μέγιστο p που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση ονομάζεται **περίοδος** της X
Αν η X δεν είναι περιοδική λέγεται **απεριοδική**.

Παραδείγματα
1) Κάθε συνεχής ή μεικτή είναι απεριοδική
2) Οι $Bin(n,p)$, $Poisson(\lambda)$, $Geom(p)$, $NegBin(n,p)$ είναι περιοδικές με περίοδο 1
3) Η X με $P(X=0) = P(X=1) = P(X=\sqrt{2}) = \frac{1}{3}$ είναι απεριοδική.

Θεώρημα **[Βασικό ανανεωτικό]**
Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία με κατανομή ενδιαμέσων χρόνων $F_X(t)$ και $\mu = E(X)$. Έστω η $h(t)$ ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση $h(t) = d(t) + (h * F_X)(t)$ και $d(t) = d_1(t) - d_2(t)$ με
- d_1, d_2: μη αρνητικές, φθίνουσες, φραγμένες
- $\int_0^{\infty} |d(t)| dt < \infty$

Τότε ισχύουν τα εξής:

i) Αν X απεριοδική τμ με $E(X) = \mu > 0$ τότε $\lim_{t \to \infty} h(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} d(u) du$
ii) Αν X περιοδική τμ με περίοδο p και $E(X) = \mu > 0$ τότε $\lim_{t \to \infty} h(t + p + x) = \frac{1}{\mu} p \sum_{k=0}^{\infty} d(kp + x)$

Οι ενδιάμεσοι χρόνοι θεωρούμε ότι ακολουθούν απεριοδικές τμ.

Άσκηση

Έστω $\{N(t), t\geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία με $0 < E(X_n) = \mu < \infty$ και $var(X_n) = 6^2 < \infty$

i) Να βρεθεί η ανανεωτική εξίσωση για την $h(t) = m(t) - \frac{t}{\mu}$

ii) Νδο $\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{6^2 - \mu^2}{2\mu^2}$

Λύση:

$$h(t) = m(t) - \frac{t}{\mu} = E(N(t)) - \frac{t}{\mu} = E\left[N(t) - \frac{t}{\mu}\right] =$$

$$\int_0^{+\infty} E\left[N(t) - \frac{t}{\mu} \mid S_1 = u\right] dF_X(u)$$

θέλω να εμφανιστεί σε αυτόν τον κλάδο το $h(t-u)$.

▷ Αν $u \leq t$: $E\left[N(t) - \frac{t}{\mu} \mid S_1 = u\right] = 1 + E\left[N(t-u) - \frac{t}{\mu}\right] =$

$$1 + E\left[N(t-u) - \frac{t}{\mu} + \frac{u}{\mu}\right] - \frac{u}{\mu} =$$

$$1 + E\left[N(t-u) - \frac{t-u}{\mu}\right] - \frac{u}{\mu} = 1 + h(t-u) - \frac{u}{\mu}$$

▷ Αν $u > t$: $E\left[N(t) - \frac{t}{\mu} \mid S_1 = u\right] = 0 - \frac{t}{\mu} = -\frac{t}{\mu}$

Άρα, $h(t) = \int_0^t \left(1 + h(t-u) - \frac{u}{\mu}\right) dF_X(u) + \int_t^{+\infty} -\frac{t}{\mu}\, dF_X(u)$

$$= (h * F_X)(t) + \int_0^t 1\, dF_X(u) - \frac{1}{\mu}\int_0^t u\, dF_X(u) - \frac{t}{\mu}\int_t^{+\infty} dF_X(u)$$

$$= (h * F_X)(t) + \underbrace{F_X(t) - \frac{1}{\mu}\int_0^t u\, dF_X(u) - \frac{t}{\mu}(1 - F_X(t))}_{d(t)}$$