Πάθημα 11.

(α) Η λύση της (1) είναι $h(t) = d(t) + (d * m)(t) \Rightarrow$

$$h(t) = 1 - F_x(x+t) + \int_0^t d(t-u)\,dm(u) =$$

$$1 - F_x(x+t) + \int_0^t (1 - F(x+t-u))\,dm(u)$$

(αε) Για τον υπολογισμό του $\lim_{t\to+\infty} h(t)$ θα εφαρμόσουμε βασικό ανα-νεωτικό θεώρημα. Αρχικά ελέγχουμε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος:

- 1η: $d(t) = d_1(t) + d_2(t)$, d_1, d_2 φθίνουσες, φραγμένες, μη αρνητικές

  αν $d_1(t) = 1 - F_X(t+x)$ όπου

  d_1 φθίνουσα καθώς $F_X(t+x)$ αύξουσα

  και $0 \le d_1(t) \le 1$

  και $d_2(t) = 0$ προφανώς φθίνουσα, φραγμένη, μη αρνητική

  ικανοποιείται η προϋπόθεση

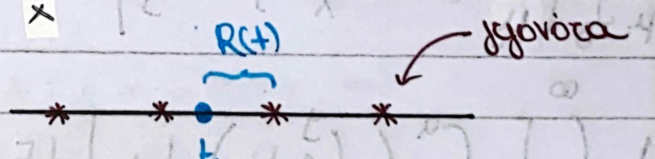
- 2η: Το $\int_0^\infty |d(t)|\,dt$ είναι πεπερασμένο

$$\int_0^\infty |d(t)|\,dt \overset{d(t)\ge 0}{=} \int_0^\infty d(t)\,dt = \int_0^\infty (1-F_X(t+x))\,dx \overset{y=t+x}{=}$$

$$\int_x^\infty (1-F_X(y))\,dy \le \int_0^\infty (1-F_X(y))\,dy = E(X) = \mu < \infty$$

Οπότε, εφόσον X συνεχής $\Rightarrow$ X απεριοδική,

$$\underset{\underbrace{\lim_{t\to\infty} P(R(t)>x)}_{\text{συνάρτηση επιβίωσης της } R(t)}}{\lim_{t\to\infty} h(t)} = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty d(t)\,dt = \frac{1}{\mu}\int_x^\infty (1-F_X(y))\,dy$$



Οριακή συνάρτηση κατανομής της R(t)

Είδαμε ότι $\lim_{t\to\infty} P(R(t)>x) = \frac{1}{\mu}\int_x^\infty (1-F_X(y))\,dy$

Άρα, $\lim_{t\to\infty} F_{R(t)}(x) = \lim_{t\to\infty} P(R(t)\le x) = \lim_{t\to\infty}[1-P(R(t)>x)] =$

$$\circledast\ \mu = \int_0^\infty y f_x(y)dy = \int_0^\infty (1-F_x(y))dy$$

$$1 - \frac{1}{\mu}\int_0^\infty (1-F_x(y))dy = \frac{1}{\mu}\mu - \frac{1}{\mu}\int_x^\infty (1-F_x(y))dy \overset{\circledast}{=}$$

$$\frac{1}{\mu}\left[\int_0^\infty (1-F_x(y))dy - \int_x^\infty (1-F_x(y))dy\right] = \frac{1}{\mu}\int_0^x (1-F_x(y))dy$$

Ορισμός (Κατανομή ισορροπίας)

Αν X τμ με συνάρτηση κατανομής $F_x(t)$ με $0<E[x]=\mu<\infty$ μπορούμε να ορίσουμε μια νέα τμ την $X_e \rightarrow$ equilibrium με σκ $F_{X_e}(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^x (1-F_x(y))dy$

Η συνάρτηση κατανομής της X_e ονομάζεται κατανομή ισορροπίας

σκ της X: χρονος μεταξυ γεγονοτων

σκ της X_e: υπολοιπομενος (οριακος) χρονος μεταξυ των γεγονοτων

Υπολογισμός της μέσης τιμής της Xe

$$E(X_e) = \int_0^\infty (1-F_{X_e}(t))dt = \int_0^\infty \left[1-\frac{1}{\mu}\int_0^t (1-F_x(y))dy\right]dt$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{1}{\mu}\mu - \frac{1}{\mu}\int_0^t (1-F_x(y))dy\right]dt =$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\mu}\left(\int_0^\infty (1-F_x(y))dy - \int_0^t (1-F_x(y))dy\right)dt =$$

$0<t<y<u<\infty$

$$\frac{1}{\mu}\int_0^\infty \left(\int_t^\infty (1-F_x(y))dy\right)dt = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty \left[\int_t^\infty \left(\int_y^\infty 1\, dF_x(u)\right)dy\right]dt =$$

$$\frac{1}{\mu}\int_0^\infty \left[\int_0^u \left(\underbrace{\int_0^y 1dt}_{y}\right)dy\right]dF_x(u) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty \left(\underbrace{\int_0^u y\,dy}_{\frac{u^2}{2}}\right)dF_x(u) =$$

$$\frac{1}{\mu}\int_0^\infty \frac{u^2}{2}dF_x(u) = \frac{1}{\mu}\frac{E[X^2]}{2} = \boxed{\frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu}} = \frac{\sigma^2}{2\mu} + \frac{\mu}{2}$$

Αρα, όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι ανανέωσης X_n έχουν σκ $F_X(t)$, μέση τιμή $0 < E[X] = \mu < \infty$ και διασπορά $var(X) = \sigma^2$, τότε ο οριακός υπολοιπόμενος χρόνος ανανέωσης έχει σκ της συνάρτηση ισορροπίας της X δηλαδή την $F_{X_e}(t)$

Ζεύγη X, X_e

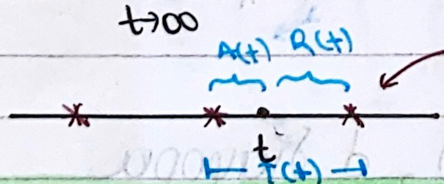
	X	X_e	
	$X = c$	$X_e \sim Uniform[0,c]$	← $var(X)=0$ άρα δεν υπάρχει ανανεωτικό παράδοξο
λόγω της αμνημόνης ιδιότητας →	$X \sim Exp(\lambda)$	$X_e \sim Exp(\lambda)$	

Μελέτη της οριακής συμπεριφοράς της $A(t)$

$\{A(t) > x\} = \{$δεν υπάρχει ανανέωση στο $(t-x, t)\} = \{R(t-x) > x\}$.

Άρα
$$\lim_{t\to\infty} F_{A(t)}(x) = \lim_{t\to\infty} P(A(t)\le x) = \lim_{t\to\infty}(1 - P(A(t)>x)) =$$
$$1 - \lim_{t\to\infty} P(A(t)>x) = 1 - \lim_{t\to\infty} P(R(t-x)>x) \overset{y=t-x}{=}$$
$$1 - \lim_{y\to\infty} P(R(y)>x) = \lim_{y\to\infty}(1 - P(R(y)>x)) = \lim_{y\to\infty} P(R(y)\le x)$$
$$= F_{X_e}(x)$$

Δηλαδή η οριακή κατανομή της ηλικίας $A(t)$ είναι η κατανομή ισορροπίας της X δηλαδή η $\lim_{t\to\infty} P(A(t)\le x) = F_{X_e}(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x (1-F_X(y))dy$ και $\lim_{t\to\infty} E(A(t)) = E(X_e) = \frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu}$. και ταυτίζεται με την οριακή κατανομή της $R(t)$.



Μελέτης της οριακής συμπεριφοράς της $T(t)$

Έχουμε ότι $T(t) = A(t) + R(t)$

Άρα $$\lim_{t\to\infty} E(T(t)) = \lim_{t\to\infty} E(A(t)+R(t)) = 2\,\frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu} = \frac{\sigma^2}{\mu} + \mu \ge \mu$$

ερμηνεύεται από το ανανεωτικό παράδοξο.

Αποδεικνύεται ότι $\lim_{t\to\infty} F_{T(t)}(x) = \lim_{t\to\infty} P(T(t)\leq x) = \frac{\int_0^x y f_x(y)\,dy}{\mu}$

φτιάχνονται ανανεωτική εξίσωση για τη $h(t) = P(T(t) > x)$

Άσκηση (από μάθημα 9)

Έστω $\{N(t): t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους ανανέωσης $\{X_n : n \geq 1\}$ με σκ $F_X(t)$, σπп $f_X(t)$ με $0 < E(X_n) = \mu < \infty$ και $var(X_n) = 6^2 < \infty$

Να βρεθεί ανανεωτική εξίσωση για την $h(t) = m(t) - \frac{t}{\mu}$ και να δειχθεί ότι $\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{6^2 - \mu^2}{2\mu^2}$

Λύση:

Έχουμε δείξει ότι $h(t) = d(t) + \int_0^t h(t-u)\,dF_X(t)$ όπου

$$d(t) = F_X(t) - \frac{1}{\mu}\int_0^t u\,dF_X(u) - \frac{t}{\mu}(1 - F_X(t))$$

$$= F_X(t) - \frac{1}{\mu}\int_0^t u f_X(u)\,du - \frac{t}{\mu}(1 - F_X(t))$$

Τεχνική: Για να απλοποιηθεί η $d(t)$ πρώτα την παραγωγίζω και μετά την ολοκληρώνω

Παραγωγίζω την d:

$$d'(t) = f_X(t) - \frac{1}{\mu} t f_X(t) - \frac{1}{\mu}(1 - F_X(t)) + \frac{t}{\mu} f_X(t)$$

$\Rightarrow d'(t) = f_X(t) - \frac{1}{\mu}(1 - F_X(t))$ και ολοκληρώνω τη σχέση

$$d(t) = \int_0^t f_X(u)\,du - \int_0^t \frac{1}{\mu}(1 - F_X(u))\,du$$

$$= F_X(t) - F_{X_e}(t) = (1 - F_{X_e}(t)) - (1 - F_X(t))$$

Άρα αν $d_1(t) = 1 - F_{X_e}(t)$, $d_2(t) = 1 - F_X(t)$, d διαφορά μη αρνητικών, φραγμένων και φθινουσών συναρτήσεων:

$$\int_0^\infty |d(t)|\,dt = \int_0^\infty |d_1(t) - d_2(t)|\,dt \overset{TA}{\leq} \int_0^\infty d_1(t)\,dt + \int_0^\infty d_2(t)\,dt =$$

$$\int_0^{\infty}(1-F_{X_e}(t))dt + \int_0^{\infty}(1-F_X(t))dt = E(X_e)+E(X) = \frac{\mu^2+\sigma^2}{2\mu}+\mu<\infty$$

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του βασικού ανανεωτικού θεωρήματος

X συνεχής $\Rightarrow$ X απεριοδική άρα

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^{\infty} d(t)\,dt = \frac{1}{\mu}\int_0^{\infty}(d_1(t)-d_2(t))\,dt =$$

$$\frac{1}{\mu}\int_0^{\infty} d_1(t)\,dt - \frac{1}{\mu}\int_0^{\infty} d_2(t)\,dt = \frac{1}{\mu}\left(E(X_e)-E(X)\right) =$$

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{\sigma^2+\mu^2}{2\mu}-\mu\right) = \frac{\sigma^2-\mu^2}{2\mu^2}$$