Μάθημα 15.

Άσκηση 1

Έστω $\{N_1(t) : t \geq 0\}$ και $\{N_2(t) : t \geq 0\}$ ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_1 και λ_2 αντίστοιχα και $\{N(t) : t \geq 0\}$ η υπέρθεσή τους

$(N_1(t) \mid N(t) = n) \sim ?$

Ισοδύναμα $(N_1(t) \mid N_1(t) + N_2(t) = n) \sim ?$

Λύση

Για $0 \leq k \leq n$

$$P(N_1(t) = k \mid N_1(t) + N_2(t) = n) = \frac{P(N_1(t) = k, N_1(t) + N_2(t) = n)}{P(N_1(t) + N_2(t) = n)}$$

$$= \frac{P(N_1(t)=k, N_2(t)=n-k)}{P(N(t)=n)} \quad \frac{\{N_1(t): t\geq 0\}, \{N_2(t): t \geq 0\}}{\text{ανεξαρτητα}}$$

$$\frac{P(N_1(t)=k)\,P(N_2(t)=n-k)}{P(N(t)=n)} \quad \frac{N_1(t) \sim Poisson(\lambda_1 \cdot t)}{\frac{N(t) \sim Poisson([\lambda_1+\lambda_2]t)}{N_2(t) \sim Poisson(\lambda_2(t)}}$$

$$\frac{e^{-\lambda_1 t}\frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}\, e^{-\lambda_2 t}\frac{(\lambda_2 t)^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\frac{([\lambda_1+\lambda_2]t)^n}{n!}} =$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{\lambda_1^k\,\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n} = \binom{n}{k}\frac{\lambda_1^k}{(\lambda_1+\lambda_2)^k}\,\frac{\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^{n-k}}$$

$$= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$$ δηλαδη $(N_1(t) \mid N_1(t)+N_2(t)=n) \sim Bin\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$

Ερμηνεια: Γνωρίζουμε οτι στο διάστημα $(0,t]$ εχουν συμβεί συνολικα n γεγονότα (τυπου 1 και τυπου 2). Καθε γεγονος είναι τυπου 1 με πιθ. $P(Z_k=1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ ανεξαρτητα από τα υπολοιπα. Οποτε, για καθε γεγονος, θεωρώ οτι εχω μια δοκιμη Bernoulli και είναι τυπου 1 (επιτυχια) με πιθ $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$. Αρα $(N_1(t) \mid N_1(t)+N_2(t)=n) \sim Bin\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$

Ασκηση 2

Σε ένα πλ. καταστημα οι παραγγελιες φθανουν με διαδικασια Poisson με ρυθμο 8 παραγγελιες/ημερα. Καθε παραγγελια είναι για ρουχα Ρ με πιθανότητα 0,6 και παπούτσια Π με πιθανοτητα 0,4, ανεξαρτητα απο τις υπολοιπες. Να υπολογιστουν:

α) P(4 παραγγελιες σημερα) $= p_1$

β) P(4 παραγγελιες αυριο | 10 παραγγελιες σημερα) $= p_2$

γ) P(20 παραγγελιες απο τις 03 εως και τις 05 Μαΐου | 5 παραγγελιες στις 04/05) $= p_3$

δ) E(χρονος εως 2η παραγγελια) $= m_1$

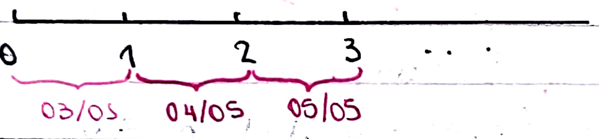
ε) E(χρόνος μεχρι 2η παραγγελια | Απο τις 03 μεχρι και τις 4 Μαΐου εγιναν 15 παραγγελιες) $= m_2$

στ) P(6 παραγγελίες σήμερα , ΡΠΠΡΡΠ) = P_4
ζ) P(6 παραγγελίες σήμερα , οι 4Ρ) = P_5

Θεωρούμε ότι ο χρονικός ορίζοντας ξεκινάει στις 03/05 στις 00:00

Λύση:

Μονάδα μέτρησης χρόνου είναι η 1 ημέρα



$N(t)$ = # παραγγελιών στο $(0,t]$, διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 8 \frac{\text{παρ}}{\text{ημ}}$
$N_1(t)$ = # παραγγελιών Ρ στο $(0,t]$, διαδικασία Poisson με ρυθμό
$\lambda_1 = \lambda \cdot P(P) = 8 \cdot 0{,}6 = 4{,}8$ παρ/ημέρα
$N_2(t)$ = # παραγγελιών στο $(0,t]$, διαδικασία Poisson με ρυθμό
$\lambda_2 = \lambda P(\Pi) = 8 \cdot 0{,}4 = 3{,}2$ παρ/ημέρα

α) P_1 = P(4 παραγγελίες σήμερα) = $P(N(1)=4) \xlongequal{N(1)\sim Poisson(8\cdot 1)} e^{-8} \dfrac{8^4}{4!}$

β) P_2 = P(4 παραγγελίες αύριο | 10 παραγγελίες σήμερα) =
$P(N(2)-N(1)=4 \mid N(1)=10) \xlongequal{\text{ανεξ. προσ.}}$
$P(N(2)-N(1)=4) \xlongequal{\text{ομογενής προσ.}}$
$P(N(1)=4) \overset{(α)}{=} e^{-8} \dfrac{8^4}{4!}$

αριθμός γεγονότων εξαρτάται από το μήκος του διαστήματος

γ) P_3 = P(20 παραγγελίες 03-05/05 | 5 παραγγελίες στις 04/05)
$= P(N(3)=20 \mid N(2)-N(1)=5) =$

Τα διαστήματα είναι επικαλυπτόμενα άρα δεν χρησιμοποιώ τις ανεξάρτητες προσαυξήσεις

$= P(N(1)+[N(2)-N(1)]+[N(3)-N(2)]=20 \mid N(2)-N(1)=5) =$
$= P(N(1)+5+[N(3)-N(2)]=20 \mid N(2)-N(1)=5)$
$= P(N(1)+[N(3)-N(2)]=15 \mid N(2)-N(1)=5) \xlongequal{\text{ανεξάρτητες προσ.}}$
$P(N(1)+[N(3)-N(2)]=15) \xlongequal{\text{ομογενείς προσ.}}$
$P(N(2)=15) \xlongequal{N(2)\sim Poisson(8\cdot 2)} e^{-16} \dfrac{16^{15}}{15!}$

δ) Ε(χρόνος μέχρι 2η παραγγελία)

S_n = χρόνος n-οστού γεγονότος της $\{N(t): t \geq 0\}$

$\mu_1 = E(S_2)$

$S_2 \sim Erlang(2, \lambda)$

Έτσι, $\mu_1 = \frac{2}{\lambda} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ της ημέρας

ε) $\mu_2 = E(S_2 \mid N(2) = 15) \overset{\text{θ. Campbell}}{=}$

$E(U_{2:15}) = \frac{2 \cdot 2}{16} = \frac{1}{4}$ ημέρας

θ. Campbell:

$(S_1, S_2, \cdots, S_n \mid N(t) = n) \sim (U_{1:n}, \cdots, U_{n:n})$

$\boxed{E[U_{i:n}] = \frac{it}{n+1}}$

στ) $P(6$ παραγγελίες, $P\Pi\Pi PP\Pi) = P(P\Pi\Pi PP\Pi \mid \underbrace{6 \text{ παργ. σημ}}_{N(1)=6}) P(\underbrace{6 \text{ παρ σημ}}_{N(1)=6})$

$0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot e^{-8} \frac{8^6}{6!} = 0{,}6^3 \, 0{,}4^3 \, e^{-8} \frac{8^6}{6!}$

ζ) $P_5 = P(6$ παραγγελίες σήμερα, οι 4 $\Pi) = P(N(1) = 6, N_2(1) = 4)$

$= P(N_1(1) + N_2(1) = 6, N_2(1) = 4) = P(N_1(1) = 2, N_2(1) = 4) \overset{N_1, N_2 \text{ ανεξ}}{=}$

$P(N_1(1) = 2) P(N_2(1) = 4) \overset{\substack{N_1(1) \sim Poisson(4{,}8 \cdot 1) \\ N_2(1) \sim Poisson(3{,}2 \cdot 1)}}{=} e^{-4{,}8} \frac{(4{,}8)^2}{2!} e^{-3{,}2} \frac{(3{,}2)^4}{4!}$