Μαθημα 17:

Ανανεωτικές διαδικασίες κόστους

✓ Ανανεωτική διαδικασία

$\{N(t): t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους X_1, X_2.

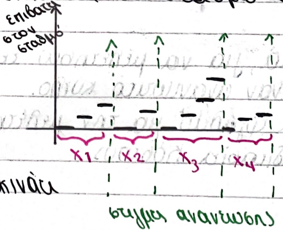
✓ Σταθμός μετρό [Παράδειγμα]

→ Συρμός με άπειρη χωρητικότητα επισκέπτεται το σταθμό τις στιγμές μιας ανανεωτικής διαδικασίας

→ Επιβάτες φθάνουν στον σταθμό σύμφωνα με διαδικασία Poisson

→ Σε κάθε επιστροφή του συρμού το σύστημα αδειάζει

→ Σε κάθε στιγμή ανανέωσης το σύστημα ξεκινάει από την αρχή



Οι εξελίξεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και "ισόνομες" [→ δηλαδή ίδιες πραγματοποιήσεις έχουν τις ίδιες πιθανότητες]

✓ Αποθήκη προϊόντων [παράδειγμα]

→ Τις στιγμές της ανανεωτικής διαδικασίας $\{N(t): t \geq 0\}$ η αποθήκη γεμίζει με Μ προϊόντα

→ Οι παραγγελίες φθάνουν με διαδικασία Poisson. Σε κάθε παραγγελία, φεύγει 1 προϊόν

→ Σε κάθε στιγμή ανανέωσης της $\{N(t): t \geq 0\}$ είναι σαν το σύστημα να ξεκινά από την αρχή

→ Οι εξελίξεις σε διαφορετικούς κύκλους είναι ανεξάρτητες και "ισόνομες"

→ Όταν η αποθήκη αδειάσει και έρθει μια παραγγελία, αυτή χάνεται

✓ Σύστημα εξυπηρέτησης [Παράδειγμα]

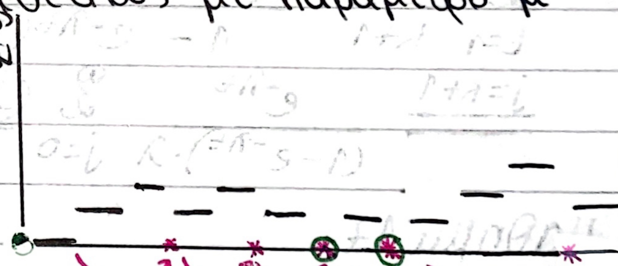
→ Πελάτες φτάνουν σύμφωνα με διαδικασία Poisson με ρυθμό λ

→ Ο χρόνος εξυπηρέτησης κάθε πελάτη είναι εκθετικός με παράμετρο μ

→ 1 υπηρέτης στο σύστημα που εξυπηρετεί τους πελάτες έναν-έναν με την σειρά που φθάνουν

→ Το σύστημα έχει ∞ χρόνο αναμονής

→ Μπορώ να θεωρήσω τις στιγμές που το σύστημα αδειάζει ως στιγμές ανανεωτικής διαδικασίας



Οι εξελίξεις σε διαφορετικούς ανανεωτικούς κύκλους είναι ανεξάρτητες και ισόνομες

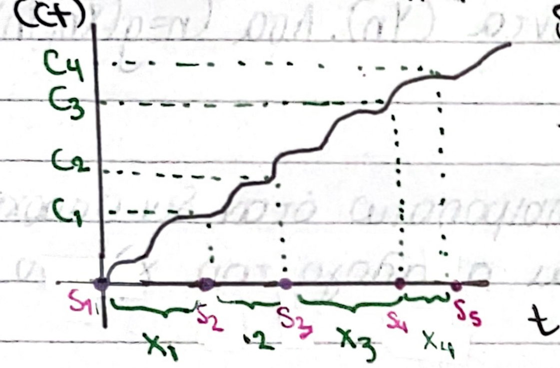
Τελικά, για να μελετήσω τέτοια συστήματα, αρκεί να περιοριστώ σε έναν ανανεωτικό κύκλο.
Ένα εργαλείο για την μελέτη τέτοιων συστημάτων είναι οι Ανανεωτικές Διαδικασίες Κόστους.

Ορισμός: Ανανεωτική διαδικασία κόστους

Έστω $\{N(t): t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους ανανέωσης $X_1, X_2, \ldots$ και ακολουθία στιγμών ανανέωσης $0 = S_1, S_2, \ldots$

Έστω $\{C(t): t \geq 0\}$ μια στοχαστική διαδικασία κόστους (όχι απαραίτητα μονότονη) όπου $C(t)$: κόστος που έχει συσσωρευτεί στο $(0, t]$

Λέμε ότι η $\{C(t): t \geq 0\}$ είναι συμβατή με την $\{N(t): t \geq 0\}$ ή ότι είναι ανανεωτική διαδικασία κόστους αν τα ζεύγη (X_n, C_n), $n \geq 1$ με $C_n = C(S_n) - C(S_{n-1})$ είναι ανεξάρτητα και ισόνομα



δηλαδή C_n: κόστος που συσσωρεύτηκε στον n-οστό κύκλο ανανέωσης

Τότε η από κοινού συνάρτηση κατανομής (X_n, C_n): $F_{X,C}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ ονομάζεται γεννήτρια σκ.

Παρατήρηση:

Δεν απαιτούμε η C_n να είναι ανεξάρτητη της X_n

Θέλουμε τα ζεύγη (X_n, C_n) να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους

Παράδειγμα Αλματική Διαδικασία Κόστους

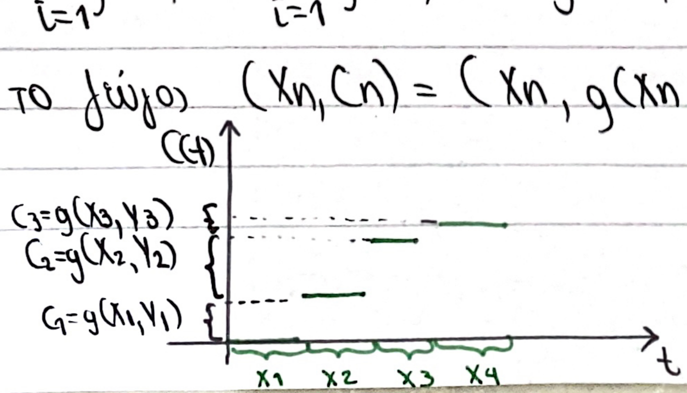
Έστω $\{N(t): t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους γεγονότων $X_1, X_2, \ldots$ και ακολουθία στιγμών γεγονότων $0 = S_1, S_2, \ldots$ και έστω $Y_1, Y_2, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τμ. Τότε η $\{C(t): t \geq 0\}$ με $C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} g(X_i, Y_i)$ λέγεται αλματική διαδικασία κόστους

Πράγματι,

$$C_n = C(S_n) - C(S_{n-1}) = \sum_{i=1}^{N(S_n)} g(X_i, Y_i) - \sum_{i=1}^{N(S_{n-1})} g(X_i, Y_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} g(X_i, Y_i) - \sum_{i=1}^{n-1} g(X_i, Y_i) = g(X_n, Y_n)$$

Άρα, το ζεύγος $(X_n, C_n) = (X_n, g(X_n, Y_n))$, $n \geq 1$ ανεξάρτητα και ισόνομα ζεύγη



Παρατήρηση: Πως μπορεί να προκύψει αθροιστική ανανεωτική διαδικασία κόστους;
Μηχάνημα με χρόνους ζωής $X_1, X_2, \dots$ ανεξάρτητους και ισόνομους. Κάθε φορά που κατασκευάζεται, λειτουργεί σαν καινούργιο.
$N(t) = \#$ επισκευών στο $(0,t]$
$\{N(t): t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία
Όσο το μηχάνημα λειτουργεί, δε συσσωρεύεται καθόλου κόστος.
Όταν χαλάσει, υπάρχει ένα κόστος συντήρησης που εξαρτάται από τους χρόνους ζωής (X_n) και κάποιον τυχαίο παράγοντα (Y_n). Άρα $C_n = g(X_n, Y_n)$

Ειδικές περιπτώσεις για την g
ι) $g(x,y) = cx$ (ανεξάρτητο του y άρα το χρησιμοποιώ όταν δεν υπάρχει τυχαίος παράγοντας και το κόστος είναι ανάλογο του χρόνου ζωής)
τότε $C_n = g(X_n, Y_n) = cX_n$

ιι) $g(x,y) = 1$ (δεν υπάρχει τυχαίος παράγοντας ούτε εξάρτηση από τον χρόνο ζωής - πληρώνουμε 1 κάθε φορά που χαλάει το μηχάνημα)
$C_n = g(X_n, Y_n) = 1$

$C(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} g(X_i, Y_i) = \sum_{i=1}^{N(t)} 1 = N(t)$: το $C(t)$ αυξάνεται κατά 1, κάθε φορά που γίνεται βλάβη

ιιι) $g(x,y) = y$ (δεν εξαρτάται από τον χρόνο ζωής)

$C_n = g(X_n, Y_n) = Y_n$: τυχαίο κόστος