Μαθημα 19
[Συνεχεια ασκησης 2]

$S_{n,i}$: χρονος αφιξης i-οστου προϊόντος στο n-οστο κύκλο

2) Επαλήθευση ορισμού

Ελέγχουμε αν η $\{C(t), t\geq 0\}$ είναι ανανεωτική διαδικασία κόστους

Αρκεί να δείξουμε ότι (X_n, C_n) είναι ανεξάρτητα και ισονομα

Βλέπουμε ότι $X_n = x$, $n\geq 1$ και ότι η C_n εξαρτάται από την εξέλιξη της διαδικασίας Poisson(*) στο n-οστο κύκλο δηλ. σε διαστήματα $[(n-1)x, x]$ που είναι μη επικαλυπτόμενα, ίσου μήκους διαστήματα, άρα λόγω ανεξάρτητων και ομογενων προσαυξήσεων της Poisson, τα $C_n, n\geq 1$ είναι ανεξάρτητα και ισόνομα.

(*) $\{A(t): t\geq 0\}$

3) Εφαρμογη ΣΑΘΚ

$C(x)$: μακροπροθεσμος μεσος ρυθμος κοστους

$$C(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} \overset{\text{ΣΑΘΚ}}{=} \frac{E[C_n]}{E[X_n]}$$

Πρέπει να υπολογίσω τα $E(X_n), E(C_n)$

$$E(X_n) = E(x) = x$$

$$E(C_n) = E\Big[K + kA_n(x) + h\sum_{i=1}^{A_n(x)} (x - S_{n,i})\Big] = K + kE[A_n(x)] + h\Big[\sum_{i=1}^{A_n(x)} (x - S_{n,i})\Big] \xrightarrow[A_n(x)\sim \text{Poisson}(\lambda x)]{\text{αριθμος προϊ}} K + k\lambda x + h\sum_{j=0}^{\infty} E\Big[\sum_{i=1}^{A_n(x)} (x - S_{n,i}) \,\Big|\, A_n(x) = j\Big]\cdot P(A_n(x)=j)$$

$$= K + k\lambda x + h\sum_{j=0}^{\infty} E\Big[\sum_{i=1}^{j} (x - S_{n,i}) \,\Big|\, A_n(x) = j\Big]\cdot P(A_n(x)=j) \xrightarrow[(S_{n,i}\mid A_n(x)=j)\sim U_{i;j}\,(*)]{\text{θ. Cammbell}}$$

$$K + k\lambda x + h\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{j}\Big(x - \frac{ix}{j+1}\Big)^{(*)} P(A_n(x)=j)$$

όπου $\displaystyle\sum_{i=1}^{j}\Big(x - \frac{ix}{j+1}\Big) = \sum_{i=1}^{j} x - \sum_{i=1}^{j}\frac{ix}{j+1} = jx - \frac{x}{j+1}\frac{(j+1)j}{2} = \frac{xj}{2}$

Άρα $\displaystyle E(C_n) = K + k\lambda x + \frac{hx}{2}\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} jP(A_n(x)=j)}_{E(A_n(x)) = \lambda x} = K + k\lambda x + \frac{h\lambda x^2}{2}$

Οπότε $C(x) = \dfrac{K + k\lambda x + \frac{h\lambda x^2}{2}}{x} = \dfrac{K}{x} + k\lambda + \dfrac{h\lambda x}{2}$

4) Βελτιστοποίηση

$C'(x) = -\dfrac{K}{x^2} + \dfrac{h\lambda}{2}$, $C'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{2K}{h\lambda}} > 0$

$C''(x) = 2\dfrac{K}{x^2} > 0$, $x \in (0,+\infty) \Rightarrow C(x)$ κυρτή στο $[0,+\infty)$

Τελικά $x^* = \sqrt{\dfrac{2K}{h\lambda}}$

Άσκηση 3 [Συντήρηση μηχανήματος]

Θεωρούμε ένα μηχάνημα με χρόνους λειτουργίας O_1, O_2, O_3 και χρόνους συντήρησης D_1, D_2, D_3

Τα ζεύγη (O_n, D_n) είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα και ισοδύναμα
Το μηχάνημα επιθεωρείται μετά από s χρονικές μονάδες λειτουργί
ας και συντηρείται. Αν όμως χαλάσει πριν τις s χρονικές μονάδες, συντη
ρείται τότε.

Κόστη συντήρησης c_p κόστος προληπτικής συντήρησης

c_f κόστος επείγουσας συντήρησης λόγω βλάβης

Θεωρούμε ότι $c_p < c_f$

Να βρεθούν

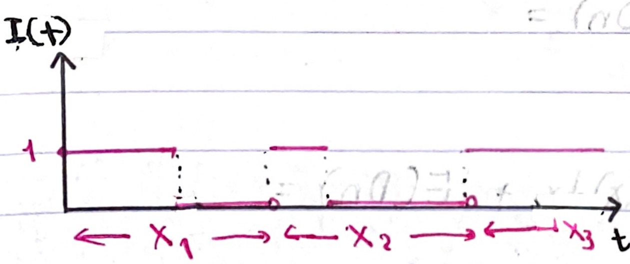
(i) μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους

(ii) βέλτιστο s.

Λύση

1) Μοντελοποίηση

Θεωρούμε την διαδικασία $I(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν λειτουργεί} \\ 0, & \text{αν συντηρείται} \end{cases}$



$\{N(t) : t \geq 0\}$ η διαδικασία των επανεναρξεων λειτουργίας.

Οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι:

X_n = χρόνος λειτουργίας στο n-οστό κύκλο + χρόνος συντήρησης στο n-οστό κύκλο

Άρα $X_n = \min(O_n, S) + D_n$

Ο X_n εξαρτάται από το (O_n, D_n). Εφόσον (O_n, D_n) ανεξάρτητα και ισόνομα, $X_n, n \geq 1$ ανεξάρτητα και ισόνομα
Οπότε $\{N(t): t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία

Θεωρούμε τη διαδικασία κόστους $\{C(t): t \geq 0\}$

$$C_n = C_p 1_{\{O_n > S\}} + C_f 1_{\{O_n \leq S\}}$$

κόστος συντήρησης
μέσα σε 1 κύκλο

2) Επαλήθευση ορισμού
Θέλουμε να δείξουμε ότι $\{C(t): t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία κόστους συμβατή με τη $N(t)$ δηλαδή ότι (X_n, C_n) ανεξάρτητα και ισόνομα

$$X_n = \min(O_n, S) + D_n$$

$$C_n = C_p 1_{\{O_n > S\}} + C_f 1_{\{O_n \leq S\}}$$

Οι X_n, C_n εξαρτώνται από το ζεύγος $(O_n, D_n)_{n \geq 1}$ που, από υπόθεση, είναι ανεξάρτητα και ισόνομα. Άρα $(X_n, C_n)_{n \geq 1}$ ανεξάρτητα και ισόνομα ζεύγη.

3) Εφαρμογή ΣΑΘΚ

$$E(X_n) = E[\min(O_n, S) + D_n] = E[\min(O_n, S)] + E(D_n) =$$

$$\int_0^{+\infty} E[\min(O_n, S) | O_n = x] \cdot f_{O_n}(x)\,dx + E(D_n) =$$

$$\int_0^S E[\min(x, S)] f_{O_n}(x)\,dx + \int_S^{\infty} E[\min(x, S)] f_{O_n}(x)\,dx + E(D_n) =$$

$$\int_0^S x f_{O_n}(x)dx + \int_S^{+\infty} s f_{O_n}(x)dx + E(D_n) = \int_0^S x[F_{O_n}(x)]'dx + s[1-F_{O_n}(S)] + E(D_n)$$

$$= [x F_{O_n}(x)]_0^S - \int_0^S F_{O_n}(x)dx + s - sF_{O_n}(S) + E(D_n) =$$

$$= s F_{O_n}(s) - \int_0^S F_{O_n}(x)dx + s - sF_{O_n}(s) + E(D_n) =$$

$$- \int_0^S F_{O_n}(x)dx + \int_0^S 1\, dx + E(D_n) =$$

$$\int_0^S [1-F_{O_n}(x)]dx + E(D_n)$$

▶ $E(C_n) = E[c_p 1_{\{O_n > S\}} + c_f 1_{\{O_n \le S\}}] =$

$$c_p E[1_{\{O_n > S\}}] + c_f E[1_{\{O_n \le S\}}] =$$

$$c_p \cdot P(O_n > s) + c_f P(O_n \le s) =$$

$$c_p[1-F_{O_n}(s)] + c_f F_{O_n}(s)$$

Άρα, ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κόστους είναι:

$$C(s) = \lim_{t\to\infty} \frac{E[C(t)]}{t} = \frac{E[C_n]}{E[X_n]} = \frac{c_p[1-F_{O_n}(s)] + c_f F_{O_n}(s)}{\int_0^S [1-F_{O_n}(x)]dx + E(D_n)}$$

4) Βελτιστοποίηση

Θεωρούμε ότι $O_n \sim Exp(\lambda)$, $D_n \sim Exp(\mu)$

Τότε $$C(s) = \frac{c_p e^{-\lambda s} + c_f(1-e^{-\lambda\mu})}{\int_0^s e^{-\lambda x}dx + \frac{1}{\mu}}$$

συνεχίζουμε όπως στις προηγούμενες ασκήσεις