Μαθημα 22

Q = # πελατων στο σύστημα σε κατασταση ισορροπιας

S = χρονος αναμονης ενος πελατη σε κατάσταση ισορροπιας

Θέλουμε να υπολογίσουμε E(Q), E(S), $p_j = P(Q=j)$ $j \geq 0$

Εμφυτευμένες διαδικασίες

Εστω $A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \dots$ στιγμες αφίξεων των διαδοχικων πελατων και $D_1 \leq D_2 \leq D_3 \leq \dots$ στιγμες αναχωρήσεων των πελατων. Θεωρουμε τις εμφυτευμένες τ.μ:

- $Q_n^- = Q(A_n^-)$ = # πελατών μολις πριν τη n-οστη άφιξη
  = # πελατών που βρίσκει στο σύστημα ο n-οστος πελατης
- $Q_n^+ = Q(D_n^+)$ = # πελατών αμεσως μετα τη n-οστη αναχωρηση
  = # πελατών που αφήνει στο σύστημα η n-οστη αναχωρηση
- a_j = μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό πελατών που κατά την άφιξή τους βρίσκουν j πελατες

  $= \lim_{n\to\infty} \frac{E[\sum_{i=1}^{n} 1\{Q_k^- = j\}]}{n} \overset{\text{απεριοδ.}}{=} \lim_{n\to\infty} P(Q_n^- = j) =$

  οριακη πιθανότητα μια άφιξη να βρει j πελατες =

  $P(Q^- = j)$ # πελατων που βρίσκει ενας πελατης κατα την άφιξη του σε κατασταση ισορροπιας

- d_j = μακροπρόθεσμο μεσο ποσοστό πελατων που αφήνουν j πελατες στο συστημα μετα την αναχώρησή τους

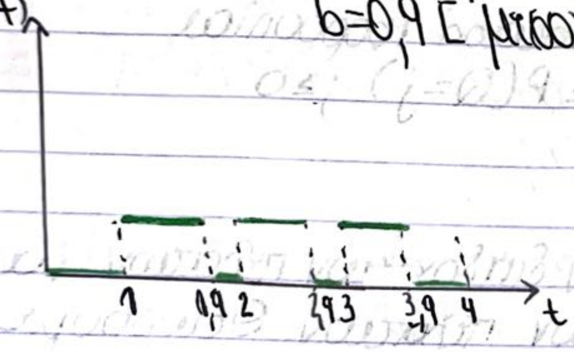
  $= \lim_{n\to\infty} \frac{E[\sum_{k=1}^{n} 1\{Q_n^+ = j)]}{n} \overset{\text{απεριοδ.}}{=} \underbrace{\lim_{n\to\infty} P(Q_n^+ = j)}_{\text{οριακη πιθανοτητα ενας πελατης να άφησει j πελατες μετα την αναχώρησή του.}} = P(Q^+ = j)$

Q^+ : # πελατων στο συστημα μετα απο αναχωρηση σε κατασταση ισορροπιας

Θέλουμε να υπολογίσουμε: $\overset{Q}{(p_j, j \geq 0)}$, $\overset{Q^-}{(a_j, j \geq 0)}$, $\overset{Q^+}{(d_j, j \geq 0\}}$

Παράδειγμα

D/D/1 με $a=1$ [μέσος ενδιαμεσος χρονος αφίξεων]
$b=0,9$ [μέσος χρονος εξυπηρετησης]



$$a_j = \begin{cases} 1, & j=0 \\ 0, & j \geq 1 \end{cases} \qquad p_j \begin{cases} 0,1 & , j=0 \\ 0,9 & , j=1 \\ 0 & , j=2 \end{cases}$$

$$d_j = \begin{cases} 1, & j=0 \\ 0, & j \geq 1 \end{cases}$$

p_j δεν ταυτίζεται με a_j ή d_j

Για να υπολογίσουμε μπορουμε

① Να μοντελοποιήσουμε το σύστημα σαν Μαρκοβιανή αλυσίδα

μεταπαιχιακό
- M / M / ... → ΜΑΔΧ
- GI / M / 1 → ΜΑΔΧ αν κοπαμε το συστημα πριν τις αφιξεις
- M / G / 1 → ΜΑΔΧ αν κοπαμε το συστημα μετά τις αφιξεις

② Να μελετησουμε το συστημα χρησιμοποιώντας βασικα αποτελέσματα

Βασικά αποτελέσματα

① Ευστάθεια

Ένα συστημα είναι ευσταθες αν $P(Q < \infty)=1$
Καθε σύστημα με πεπερασμενη χωρητικότητα είναι ευσταθές

Ρυθμος σύνωστισμου: εργασια σε χρονικη μονάδα που εισερχεται ανα χρονικη μοναδα

$$\boxed{p = \lambda \cdot b}$$

οπου

λ: ρυθμος αφιξεων = μεσος # πελατων που φτανουν ανα χρονική μοναδα

$b = E(X)$: μεσος χρονος εξυπηρετησης = μοναδες χρονου που ένας υπηρετης αφιερωνει σε μια αφιξη κατα ΜΟ.

c = # υπηρετών = εργασια σε χρονικες μοναδες που διεκπεραιώνεται σε μια χρονικη μονάδα

Διαισθητικά, ένα συστημα είναι ευσταθές αν:

εργασια σε χρον. μον. που εισερχεται ανα χρον μοναδα ≤ εργασια σε χρον μον που διεκπεραιώνεται ανα χρον. μονάδα

$$\rho \leq c$$

Θεώρημα

Στο GI/G/C σύστημα με συνεχή κατανομη χρονων αφίξεων ή/και συνεχή κατανομη χρονων εξυπηρετησης ισχυει ένα απο τα παρακάτω

- $\rho < c \iff$ ευσταθες συστημα:
  $\exists\, (p_j, j \geq 0), (a_j, j \geq 0), (d_j, j \geq 0)$ τω $p_j, a_j, d_j > 0$, $j \geq 0$ και $\sum_{j=0}^{\infty} p_j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j = \sum_{j=0}^{\infty} d_j = 1$
- $\rho \geq c \iff$ ασταθές σύστημα:
  $p_j = a_j = d_j = 0$, $j > 0$ και το πληθος των πελατων απειρίζεται καθως $t \to \infty$

② Νόμος του Little

Σε καθε ευσταθες συστημα ισχυει

$$\boxed{E(Q) = \lambda \cdot E(S)}$$

$E(Q)$: μεσος #πελατών στο συστημα

λ: ρυθμος αφιξης στο συστημα

$E(S)$: μεσος χρονος παραμονης στο συστημα

Αιτιολόγηση 1 (οικονομική θεωρία)

Έστω ότι κάθε πελάτης πληρώνει μια χρηματική μονάδα για κάθε χρονική μονάδα παραμονής στο σύστημα

- Αν η πληρωμή γίνει ανά χρονική μονάδα:
  μακροπρόθεσμο μέσο $= E(Q)$
  έσοδο ανά χρον μονάδα
- Αν η πληρωμή γίνει προκαταβολικά
  μακροπρόθεσμο μέσο $= \lambda E(S)$
  έσοδο ανά χρον μονάδα

Άρα, $E(Q)=\lambda E(S)$

Αιτιολόγηση 2

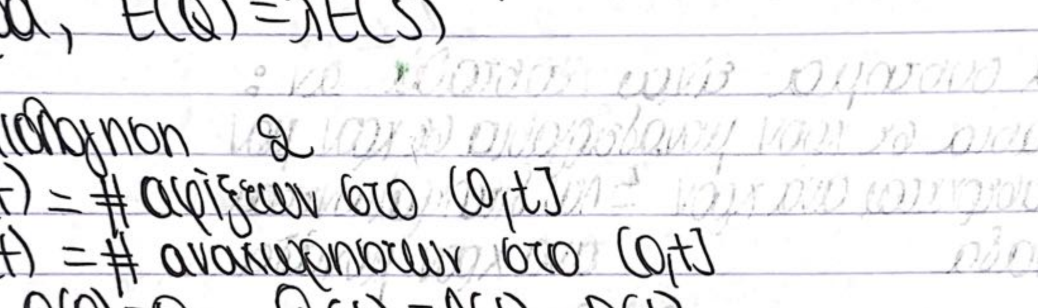
$A(t) = \#$ αφίξεων στο $(0,t]$

$D(t) = \#$ αναχωρήσεων στο $(0,t]$

Αν $Q(0)=0$, $Q(t)=A(t)-D(t)$

$S_1, S_2, \dots$ χρόνοι παραμονής στο σύστημα

$T_1, T_2, \dots$ στιγμές ολοκληρώσεων κύκλων λειτουργίας



Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος μέχρι την στιγμή Tn:

$$\int_0^{T_n} A(u)du - \int_0^{T_n} D(u)du = \int_0^{T_n} (A(u)-D(u))\,du = \int_0^{T_n} Q(u)du =$$

$$\sum_{K}^{A(T_n)} S_K \Rightarrow \int_0^{T_n} Q(u)du = \sum_{k=1}^{A(T_n)} S_k$$

Μαθημα 23.

(Συνέχεια από μαθημα 22)

Αν περιορίσουμε σε έναν αναγεννητικό δηλαδή σε έναν κύκλο λειτουργίας:

$$\int_0^Z Q(u)\,du = \sum_{k=1}^{A(Z)} S_k$$

$$E(Q) = \lim_{t \to \infty} \frac{E\left[\int_0^t Q(u)du\right]}{t} \overset{\text{ΣΑΘΚ}}{=} \frac{E\left[\int_0^Z Q(u)du\right]}{E[Z]} = \frac{E\left[\sum_{k=1}^{A(Z)} S_k\right]}{E(Z)} =$$

$$\frac{E(A(Z))}{E(Z)} \cdot \frac{E\left[\sum_{k=1}^{A(Z)} S_k\right]}{E(A(Z))} = \lambda E(S) \Rightarrow \boxed{E(Q) = \lambda E(S)}$$

▶ μέσος αριθμός αφίξεων σε έναν κύκλο

▶ μέση διάρκεια κύκλου

▶ συνολικός χρόνος παραμονής για όλους τους πελάτες σε έναν κύκλο.

Παρατηρήσεις

▶ Θα πρέπει ο ρυθμός άφιξης λ και ο μέσος χρόνος παραμονής E(S) να αφορούν τους ίδιους πελάτες (πχ εισερχόμενους ή εξερχόμενους)

▶ Ο Νόμος του Little μπορεί να εφαρμοστεί και σε οποιοδήποτε σύστημα εξυπηρέτησης

Εφαρμογή του Νόμου Little.

▶ στον χώρο αναμονής $E[Q_q] = \lambda E(W)$

μέσο πλήθος πελατών στον χώρο αναμονής

ρυθμός άφιξης στον χώρο αναμονής

μέσος χρόνος αναμονής

▶ στον χώρο εξυπηρέτησης υπό GI/G/C (όλοι οι πελάτες που έρχονται, εξυπηρετούνται)

$$E(Q_s) = \lambda E(X)$$

μέσο πλήθος πελατών στον χώρο εξυπηρέτησης

ρυθμός άφιξης στον χώρο εξυπηρέτησης

μέσος χρόνος εξυπηρέτησης

▶ στον χώρο εξυπηρέτησης της GI/G/1

$$E(Q_s) = \lambda E(x) = \lambda b = \rho \Rightarrow$$

$$\underbrace{P(Q_s=1)} \cdot 1 + \underbrace{P(Q_s=0)} \cdot 0 = \rho \Rightarrow 1 - p_0 = \rho \Rightarrow p_0 = 1-\rho$$

$$P(Q \geq 1) = 1 - P(Q=0) \qquad P(Q=0) = p_0$$
$$= 1 - p_0$$

③ Ιδιότητα μεμονωμενων αφιξεων

Γενικα , $(a_j, j \geq 0) \neq (d_j, j \geq 0) \neq (p_j, j \geq 0)$

$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$P(Q^- = j)$	$P(Q^+ = j)$	$P(Q=j)$
πιθανοτητα να βρει καποιος j πελατες πριν την άφιξη	πιθανοτητα να υπαρχουν j πελατες μετα την αναχωρηση	πιθανοτητα να υπαρχουν j πελατες στο συστημα μια τυχαια στιγμη

Θεωρημα [Ιδιότητα μεμονωμενων αφιξεων]

Σε συστηματα στα οποια οι αφιξεις και οι αναχωρήσεις γίνονται μεμονωμενα, οι οριακες κατανομες του αριθμου των πελατων πριν και μετα από αναχωρηση ταυτιζονται.

Δηλαδη, $(a_j, j \geq 0) = (d_j, j \geq 0)$

Αιτιολογηση

$A(t) = \#$ αφιξεων $(0,t]$

$D(t) = \#$ αναχωρησεων $(0,t]$

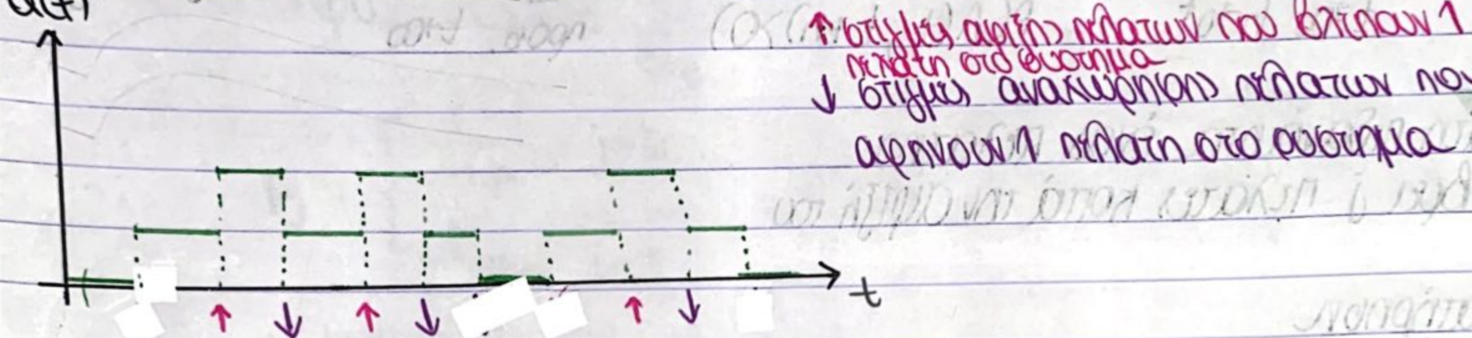
$A_j(t) = \#$ αφιξεων στο $(0,t]$ και βρισκουν j πελατες στο συστημα

$D_j(t) = \#$ αναχωρησεων στο $(0,t]$ και αφηνουν j πελατες στο συστημα

$a_j = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{A_j(t)}{A(t)}$ → μακροπροθεσμο ποσοστο πελατών που κατα την αφιξη τους βρισκουν j πελατες

$d_j = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{D_j(t)}{D(t)}$ → μακροπροθεσμο ποσοστο πελατων που αφηνουν j πελατες στο συστημα κατα την αναχώρηση τους

Λόγω ευστάθειας, $\underbrace{\lim_{t\to\infty}\frac{A(t)}{t}}_{\text{μακροπρόθεσμος ρυθμός αφίξεων}} = \underbrace{\lim_{t\to\infty}\frac{D(t)}{t}}_{\text{μακροπρόθεσμος ρυθμός αναχωρήσεων}}$



Λόγω μεμονωμένων αφίξεων και εξυπηρετήσεων, οι μεταβάσεις της $\{Q(t): t\ge 0\}$ τύπου $j\to j+1$ εναλλάσσονται με μεταβάσεις τύπου $j+1\to j$

Οπότε $0 \le A_j(t) - D_j(t) \le 1$ άρα

$$\lim_{t\to\infty}\frac{A_j(t)-D_j(t)}{t} = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{A_j(t)}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{D_j(t)}{t}$$

άρα $a_j = \lim_{t\to\infty}\frac{A_j(t)}{A(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{\frac{A_j(t)}{t}}{\frac{A(t)}{t}} = \lim_{t\to\infty}\frac{\frac{D_j(t)}{t}}{\frac{D(t)}{t}} = d_j$

④ Ιδιότητα PASTA (Poisson – Arrivals – See – Time – Average)

Θεώρημα

Σε συστήματα όπου οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με διαδικασία Poisson, οι κατανομές του αριθμού πελατών στο σύστημα πριν από άφιξη και αριθμού πελατών στο σύστημα σε συνεχή χρόνο ταυτίζονται. Δηλαδή,

$$(a_j, j\ge 0) = (P_j, j\ge 0)$$

Απόδειξη

Έστω $A(t,t+h] = \#$ αφίξεων $(t,t+h]$

$$a_j = \lim_{t\to\infty}\lim_{h\to 0^+} P(Q(t)=j \mid A(t,t+h)>0) =$$

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{h\to 0^+} \frac{P[A(t,t+h)>0 \mid Q(t)=j]\, P(Q(t)=j)}{P(A(t,t+h)>0)} \overset{\text{ανεξ}}{\underset{\text{προσ.}}{=}} \lim_{t\to\infty} P(Q(t)=j) = p_j$$

οριακή πιθανότητα ένας πελάτης
να βρει j πελάτες κατά την άφιξή του

Παρατήρηση
Αν έχουμε Poisson διαδικασία αφίξεων και μεμονωμένων εξυπηρετήσ
τότε $(p_j, j\geq 0) = (a_j, j\geq 0) = (d_j, j\geq 0)$

Παράδειγμα 1
M/G/1/1 – Ανάλυση μέσης τιμής
Poisson διαδικασία αφίξεων με ρυθμό λ
Χρόνος εξυπηρέτησης $X \sim F_B(x)$, $E(X)=b$
1 υπηρέτης
χωρητικότητα: 1 [FCFS]
Να βρεθούν α) $E(Q)$, $E(S)$: μέσος χρόνος παραμονής πελατών που φτάνου
$(a_j, j\geq 0)$, $(p_j, j\geq 0)$, $(d_j, j\geq 0)$

Λύση
Σχέση 1: (N. Little) $E(Q) = \lambda E(S)$
Σχέση 2: (Δέσμευση ως προς τον αριθμό πελατών που βρίσκει κατά την άφιξή του: Q^-).

$$E(S) = \sum_{j=0}^{1} E[S \mid Q^- = j]\, P(Q^-=j) =$$

$$\underbrace{E(S \mid Q^-=0)}_{b}\underbrace{P(Q^-=0)}_{a_0} + \underbrace{E(S \mid Q^-=1)\, P(Q^-=1)}_{0}$$

$$b a_0 \underset{\text{PASTA}}{=} b p_0 \Rightarrow E(S) = b p_0$$

$$(1) \overset{(2)}{\Longrightarrow} E(Q) = \underbrace{\lambda b}_{\rho} p_0 = p_0 \rho \Rightarrow$$

$$0\, P(Q=0) + 1\, P(Q=1) = \rho P_0 \Rightarrow P_1 = \rho P_0 \overset{P_0+P_1=1}{\Longrightarrow}$$

$$1 - P_0 = \rho P_0 \Rightarrow P_0 = \frac{1}{1+\rho}$$

άρα $E(S) = \frac{b}{1+\rho}$, $E(Q) = \rho P_0 = \frac{\rho}{1+\rho}$

$$P_j = \begin{cases} \frac{1}{1+\rho}, & j=0 \\ \frac{\rho}{1+\rho}, & j=1 \end{cases}$$

$$d_j \overset{\text{μεμονωμένα}}{\underset{\text{αφίξεων και εξυπηρ.}}{=\!=}} a_j \overset{\text{PASTA}}{=\!=} p_j$$

Μάθημα 24.

Παράδειγμα 2

Μ/Μ/1 Ανάλυση μέσης τιμής
Διαδικασία αφίξεων Poisson με ρυθμό λ.
Χρόνοι εξυπηρέτησης $X \sim Exp\lambda$
1 υπηρέτης
∞ χωρητικότητα
FCFS

Να βρεθούν α) συνθήκη ευστάθειας
β) $E(Q), E(S)$
γ) $(p_j, j\geq 0)$, $(a_j, j\geq 0)$, $(d_j, j\geq 0)$
δ) $E(Z), E(I), E(Y)$

Λύση

α) ενδιάμεσοι χρόνοι αφίξεων συνεχείς (μπορούμε να πάμε ή/και για τους χρόνους εξυπηρέτησης) } το σύστημα είναι ευσταθές $\Leftrightarrow$ $\rho < c \Leftrightarrow \lambda b < 1 \Leftrightarrow \lambda \frac{1}{\mu} < 1 \Leftrightarrow \lambda < \mu$, $\rho < 1$

β) Σχέση 1: (Νόμος του Little) $E(Q) = \lambda E(S)$

Σχέση 2: Υπολογισμός $E(S)$ δεσμεύοντας ως προς τον #πελατών που βρίσκει ένας πελάτης κατά την άφιξή του, Q^-

Σημείωση: Στην προηγούμενη άσκηση είχαμε χωρητικότητα 1 και εκφράσαμε την μέση τιμή του S, ($E(S)$) ως προς p_0. Τώρα έχουμε άπειρη χωρητικότητα κάνοντας το ίδιο θα εμφανιστούν $p_0, p_1, p_2, \dots$ Τώρα θα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε την $E(S)$ σαν συνάρτηση της $E(Q)$

$$E(S) = \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{E[S \mid Q^- = j]}_{} P(Q^- = j)$$

$$E\Big[\underset{\substack{S\\ Exp(\mu)}}{\text{χρόνος της δικής του εξυπηρέτησης}} + \underbrace{\text{j-1 χρόνους εξυπηρέτησης των πελατών στην ουρά}}_{j-1 \text{ ανεξ} \sim Exp(\mu)} + \underset{\substack{\text{(αμνήμονη ιδιότητα)}\\ \sim Exp(\mu)}}{\text{υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρ. του πελάτη που εξυπηρετείται}}$$

$$\Rightarrow E(S) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\frac{1}{\mu} a_j \xrightarrow[a_j = p_j]{PASTA} \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\frac{1}{\mu} p_j = \frac{1}{\mu}\left(\sum_{j=0}^{\infty} j p_j + \sum_{j=0}^{\infty} p_j\right) \Rightarrow$$

$$E(S) = \frac{1}{\mu}\left(E(Q) + 1\right)$$

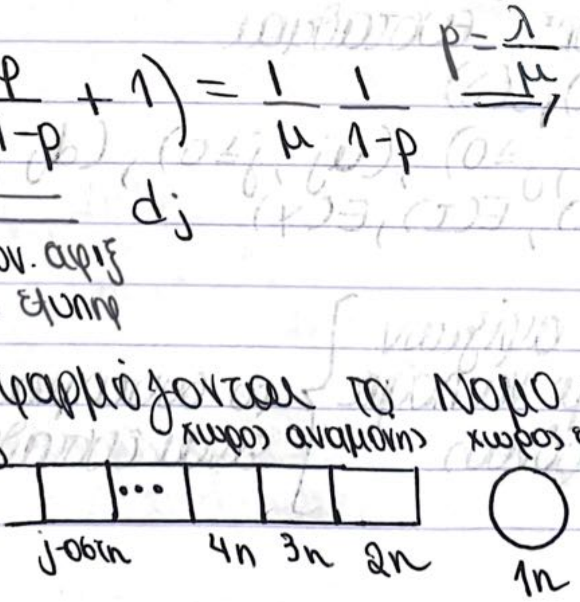
$$(1) \overset{(2)}{\Longrightarrow} E(Q) = \lambda E(S) = \lambda \frac{1}{\mu}\left(E(Q)+1\right) \Rightarrow E(Q) = \rho\left(E(Q)+1\right) \Rightarrow$$

$$E(Q) = \frac{\rho}{1-\rho} \quad (3)$$

$$(2) \overset{(3)}{\Longrightarrow} E(S) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\rho}{1-\rho} + 1\right) = \frac{1}{\mu}\frac{1}{1-\rho} \xrightarrow{\rho = \frac{\lambda}{\mu}} E(S) = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$\gamma)\ p_j \xrightarrow{PASTA} a_j \xrightarrow[\text{μεμον. αφιξ του εξυπηρ}]{} d_j$$

Θα βρούμε το p_j εφαρμόζοντας το Νόμο του Little στη j-οστή θέση του συστήματος



$$E\underbrace{\begin{bmatrix}\text{πληθος πελατων}\\ \text{στη j-οστη θεση}\end{bmatrix}}_{Q_j} = \underbrace{\begin{matrix}\text{ρυθμος αφιξης}\\ \text{στη j-οστη θεση}\end{matrix}}_{\lambda_j} \cdot E\underbrace{\begin{bmatrix}\text{χρονος παραμονης}\\ \text{στη j-οστη θεση}\end{bmatrix}}_{S_j}$$

▶ $E(Q_j) = 0 \cdot \underbrace{P(Q_j=0)}_{P(Q\leq j-1)} + 1\, \underbrace{P(Q_j=1)}_{P(Q\geq j)} = 1 - \sum_{k=j}^{\infty} \underbrace{P(Q=k)}_{p_k} = \sum_{k=j}^{\infty} p_k$

▶ λ_j = ρυθμος αφιξης στη j-οστη θεση = μακροπροθεσμος μεσος #πελατων που φθανουν στη j-οστη θεση στην μοναδα του χρονου = μεσος #πελατων που φθανουν στο συστ στην μοναδα του χρονο • $P(Q \geq j-1)$

$\Rightarrow \lambda_j = \lambda \sum_{k=j-1}^{\infty} \underbrace{P(Q^{-}=k)}_{\substack{\text{PASTA}\\ a_k = p_k}} \Rightarrow \lambda_j = \lambda \sum_{k=j-1}^{\infty} p_k$

▶ $E(S_j) = \frac{1}{\mu}$

Αρα, $\sum_{k=j}^{\infty} p_k = \lambda \cdot \sum_{k=j-1}^{\infty} p_k \cdot \frac{1}{\mu} = \rho \sum_{k=j-1}^{\infty} p_k$

$$\left.\begin{matrix}\text{Νομος του Little στην j-θεση} & \sum_{k=j}^{\infty} p_k = \rho \sum_{k=j-1}^{\infty} p_k \\ \text{Νομος του Little στην (j+1)-θεση} & \sum_{k=j+1}^{\infty} p_k = \rho \sum_{k=j}^{\infty} p_k\end{matrix}\right\} (-)$$

$p_j = \rho\, p_{j-1}\, , j \geq 1$

Εχουμε οτι $p_j = \rho \cdot p_{j-1} = \rho^2 p_{j-2} = \rho^3 p_{j-3} = \ldots = \rho^j p_0$

$$p_j = \rho^j p_0 \xRightarrow{p_0 = 1-\rho} p_j = \rho^j (1-\rho) \quad j \geq 0$$

δ) • $E[I] = E\underbrace{\begin{bmatrix}\text{υπολοιπομενος χρονος}\\ \text{μεχρι να φτασει ενας πελατης}\end{bmatrix}}_{\sim Exp} = \frac{1}{\lambda}$

P_0 = μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που υπάρχουν 0 πελάτες στο σύστημα = ποσοστό του χρόνου που υπάρχουν 0 πελάτες στο σύστημα σε έναν κύκλο λειτουργίας

$$= \frac{E(I)}{E(Z)} \Rightarrow E(Z) = \frac{E(I)}{P_0} = \frac{1/\lambda}{1-\rho} \Rightarrow E(Z) = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}$$

$$E(Y) = E(Z) - E(I) = \frac{1}{\lambda(1-\rho)} - \frac{1}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$$

Παράδειγμα 3

M/M/1 ουρά

Κάθε φορά που το σύστημα αδειάζει, ο υπηρέτης απενεργοποιείται. Όταν φτάσει ο πρώτος πελάτης στο άδειο σύστημα, αρχίζει ένας χρόνος ενεργοποίησης ~ Exp(θ). Όταν τελειώσει ο χρόνος ενεργοποίησης, ξεκινά να εξυπηρετεί. Να βρεθούν τα E(Q), E(S) =;

Λύση

Σε αυτό το σύστημα, η κατάσταση περιγράφεται από το Q και την τμ
$$I = \begin{cases} 1, & \text{υπηρέτης ενεργοποιημένος} \\ 0, & \text{υπηρέτης απενεργοποιημένος} \end{cases}$$

Σημείωση: Η ιδιότητα PASTA λέει ότι όταν έχουμε Poisson διαδικασία αφίξεων, το πλήθος πελατών σε γενικούς χρόνους και το πλήθος πελατών σε στιγμές αφίξεων ταυτίζονται. Αυτό γενικεύεται σε οποια άλλη τμ δίνει την κατάσταση του συστήματος, εδώ στην I

Σχέση 1: (Νόμος Little) $E(Q) = \lambda E(S)$

Σχέση 2: Υπολογισμός $E(S)$

$$E(S) = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{\infty} E[S \mid Q^- = j, I^- = i]\, P(Q^- = j, I^- = i) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{E[S|Q^-=j, I^-=0]}_{\frac{1}{\theta}(j+1)\frac{1}{\mu}} P(Q^-=j, I^-=0] + \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{E[S|Q^-=j, I^-=1]}_{(j+1)\frac{1}{\mu}} \cdot$$

$$P(Q^-=j, I^-=1) =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\theta}(j+1)\frac{1}{\mu}\right] P(Q^-=j, I^-=0) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\mu}(j+1) P(Q^-=j, I^-=1) =$$

$$\frac{1}{\theta}\sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{P(Q^-=j, I^-=0)}_{P(I^-=0)} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\mu}(j+1)[\underbrace{P(Q^-=j, I^-=0) + P(Q^-=j, I^-=1)}_{P(Q^-=j)}]$$

$$\frac{1}{\theta} P(I^-=0) + \frac{1}{\mu}\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)P(Q^-=j) \xrightarrow{PASTA} \frac{1}{\theta}P(I=0) + \frac{1}{\mu}\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)p_j}_{E(Q)+1}$$

$$\Rightarrow E(S) = \frac{P(I=0)}{\theta} + \frac{1}{\mu}[E(Q)+1]$$

Άσκηση 3. (Νόμος του Little στον χώρο εξυπηρέτησης)

$$E(Q_S) = \lambda\frac{1}{\mu} \Rightarrow 0\underbrace{P(Q_S=0)}_{\text{υπηρ. απενεργ}} + 1\underbrace{P(Q_S=1)}_{\text{υπηρ. ενεργ.}} = \rho \Rightarrow$$

$$1P(I=1) = \rho \Rightarrow 1 - P(I=0) = \rho \Rightarrow$$

$$P(I=0) = 1-\rho.$$