

Ουρές: 2 εξυπηρετές, κατάσταση ισορροπίας

ΘΕΜΑ 4 9/2024

p_n : η πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο Σ

$$p_0 = \frac{1}{16}, p_1 = \frac{4}{16}, p_2 = \frac{6}{16}, p_3 = \frac{4}{16}, p_4 = \frac{1}{16}, p_n = 0, n \geq 5$$

A. Αναμενόμενος [#]αριθμός πελατών στο Σ

$$E(Q) = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + 3 \cdot \frac{4}{16} + 4 \cdot \frac{1}{16} = 2$$

Αναμενόμενος αριθμός πελατών στην ουρά.

$$E(Q \text{ στην ουρά}) = \sum_{n \geq 2} p_n (n-2) = p_3 \cdot 1 + p_4 \cdot 2 = \frac{6}{16}$$

Σχόλιο: κάθε φορά στην ουρά υπάρχουν $n-2$ πελάτες

B. Αναμενόμενος χρόνος παραμονής στο Σ / αναμενόμενος χρόνος παραμονής στην αία

$$\text{αναμενόμενος χρόνος παραμονής στο } \Sigma = E(S) \stackrel{\text{Little}}{=} \frac{E(Q)}{\lambda} = \frac{2}{2} = 1 \quad \left[\begin{array}{l} \text{αν} \\ \lambda = 2 \text{ πελάτες/ω} \end{array} \right]$$

$$E(S_{\text{αία}}) = \frac{E(Q_{\text{αία}})}{\lambda} = \frac{\frac{6}{16}}{2} = \frac{3}{16}$$

Σχόλιο: αριθμός που μπαίνει στο Σ = αριθμός που μπαίνει στην ουρά

A. C_n : κόστος σε έναν κύκλο

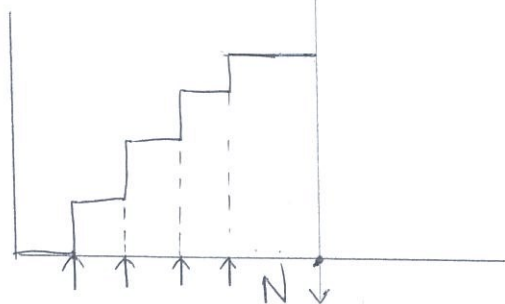
X : μήκος κύκλου από αναχώρηση σε αναχώρηση

(C_n, X_n) $n \geq 1$ ανεξάρτητες και ισόνομες

B. $X_1 = T_1 + \dots + T_N$

$$X_n = T_{n,1} + \dots + T_{n,N}$$

$T_{n,i}$: χρόνος αναμονής στον $i-1$ και i τηλέφωνο του n -οστού κύκλου



$$C_n = k + \underbrace{T_{n,1}}_{\text{σταθερό κόστος}} \cdot 0 \cdot c + T_{n,2} \cdot 1 \cdot c + T_{n,3} \cdot 2 \cdot c + \dots + T_{n,N} \cdot (N-1) \cdot c$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(C(t))}{t} = \frac{E(C_1)}{E(X_1)}$$

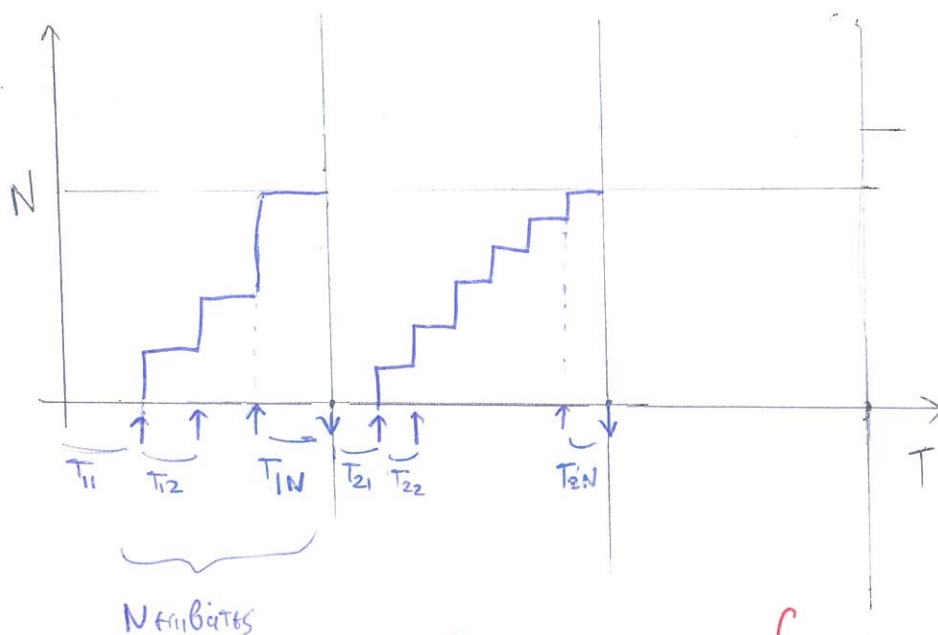
$$E(X_1) = E(T_{1,1} + \dots + T_{1,N}) = N E(T_1) = N \cdot \mu$$

$$\begin{aligned} E(C_1) &= E(T_1 \cdot 0 \cdot c + T_2 \cdot 1 \cdot c + \dots + T_N \cdot (N-1) \cdot c + k) = c \cdot E(T) (0 + 1 + 2 + \dots + N-1) + k = \\ &= c E(T) \frac{(N-1) \cdot N}{2} + k = \frac{c \cdot \mu \cdot N(N-1)}{2} + k = \frac{c(N-1)}{2} + \frac{k}{N \cdot \mu} = g(N) \end{aligned}$$

Γ. κλασική επίλυση με παραγωγή του $g(N)$.

iii) Μέσο πλήθος κλιβάρων που έχουν αναχωρήσει μέχρι τη στιγμή t .

$$\begin{aligned}
 E\left(\sum_{i=1}^{M(t)} (\lambda(S_i) - \lambda(S_{i-1}))\right) &= E\left(\lambda(S_{M(t)})\right) = E\left(E(\lambda(S_{M(t)}) / S_{M(t)})\right) = \\
 &= E(\lambda \cdot S_{M(t)}) = \lambda E(S_{M(t)}) = \lambda \cdot E(E(S_{M(t)} / M(t))) = \\
 &= \lambda \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} E(S_{M(t)} / M(t) = n) P(M(t) = n) = \lambda \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n \cdot t}{n+1} \frac{e^{-\mu t} (\mu t)^n}{n!} = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n t}{n+1} \frac{e^{-\mu t} (\mu t)^n}{n!} = \\
 &= \dots = \lambda t - \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t})
 \end{aligned}$$



Αφίσης κλιβάρων $E(T_1) = \mu$

Η ταμεια κλιβαίνεται με κόστος $n \cdot c$ ανά μονάδα χρόνου που απειμένουν η κλιβάρες στην πλαφόρμα

k : κόστος αναχώρησης τρένου, $C(t)$: συνολικό κόστος μέχρι τον χρόνο t

Α. ΝΑΟ $\{C(t), t \geq 0\}$ αναπτυσσόμενη διαδικασία κόστους

Β. ΝΑΟ ο μακροπρόθεσμος μέσος ετήσιος κόστος δίνεται από τον τύπο: $\frac{C(N-1)}{2} + \frac{k}{N \cdot \mu}$

Γ. Να βρεθεί βέλτιστο N για να ελαχιστοποιηθεί ο μακροπρόθεσμος μέσος ετήσιος κόστος

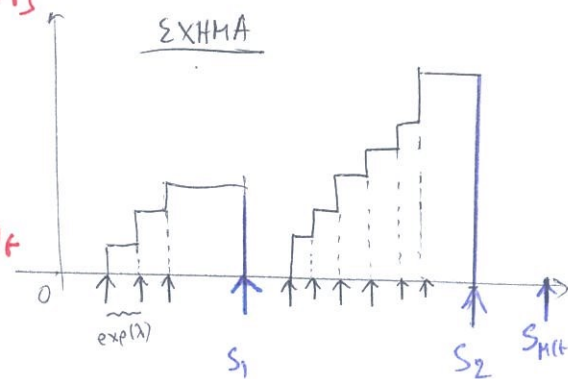
✳️ Σημειώματα: $E(S_{M(t)} / M(t) = n) = E(S_n / M(t) = n) \stackrel{\text{O. Campbell}}{=} \frac{n \cdot t}{n+1}$

6 εκ/1 α 8

$$\begin{aligned}
 E(N(t/2) / S_1, st) & \stackrel{N(t/2) \leq N(t)}{=} E(N(t/2) / N(t) \geq 1) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(N(t/2)=k / N(t) \geq 1) = \\
 & = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{P(N(t/2)=k, N(t) \geq 1)}{P(N(t) \geq 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot P(N(t/2)=k, N(t) - N(t/2) \geq 1-k)}{P(N(t) \geq 1)} \quad \text{ανεξαρτητός} \\
 & \quad \text{προσωνήτης} \\
 & = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{P(N(t/2)=k) \cdot P(N(t) - N(t/2) \geq 1-k)}{P(N(t) \geq 1)} \quad \text{ομογενής} \\
 & \quad \text{προσωνήτης} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{P(N(t/2)=k) P(N(t/2) \geq 1-k)}{P(N(t) \geq 1)} \\
 & \stackrel{P(N(t/2) \geq 1-k) = 1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{P(N(t/2)=k)}{P(N(t) \geq 1)} = \frac{E(N(t/2))}{P(N(t) \geq 1)} = \frac{\lambda \cdot t/2}{1 - e^{-\lambda t}}
 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 2 2/7/2012

Αφιζής επιβατών $PP(\lambda)$ $\{N(t), t \geq 0\}$
 Αφιζής μετρό $PP(\mu)$ $\{N(t), t \geq 0\}$ } ανεξαρτητές
 $S_1, S_2, S_3, \dots$



ii) Μέσο πλήθος επιβατών που επιβιβάζονται στο δρομίο σε κάθε επίσκεψη δρομίου.

α' τρόπο)

$$E(N(S_1)) \stackrel{\text{Θ.Δ.Κ.Τ.}}{=} E[E(N(S_1)/S_1)] = E(\lambda \cdot S_1) = \lambda \cdot E(S_1) = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu}$$

β' τρόπο)

$$\begin{aligned}
 E(N(S_1)) & = \int_0^{\infty} E(N(S_1) / S_1=u) dF_{S_1}(u) = \int_0^{\infty} E(N(u) / S_1=u) dF_{S_1}(u) = \int_0^{\infty} E(N(u)) \mu e^{-\mu u} du \\
 & = \int_0^{\infty} \lambda u \mu e^{-\mu u} du = \lambda \int_0^{\infty} u \mu e^{-\mu u} du = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu}
 \end{aligned}$$

iii) $P(\text{να μην επιβιβαστεί κανείς επιβάτης στο μετρό}) = P(N(S_1)=0) = \int_0^{\infty} P(N(S_1)=0 / S_1=u) dF_{S_1}(u)$

$$\begin{aligned}
 & = \int_0^{\infty} P(N(u)=0 / S_1=u) dF_{S_1}(u) = \int_0^{\infty} P(N(u)=0) dF_{S_1}(u) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} \mu e^{-\mu u} du = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \int_0^{\infty} (\lambda + \mu) e^{-(\lambda + \mu)u} du \\
 & = \frac{\mu}{\lambda + \mu}
 \end{aligned}$$

σελίδα 7

$$\{N_1(t), t \geq 0\} \text{ PP}(\lambda_1) \quad \text{avt. } \int_0^t \lambda_1 \tau d\tau$$

$$\{N_2(t), t \geq 0\} \text{ PP}(\lambda_2)$$

$$\begin{aligned} & P(N_1(\frac{t}{2})=k, N_2(\frac{t}{2})=n-k \mid N(t)=n+1) = \frac{P(N_1(\frac{t}{2})=k, N_2(\frac{t}{2})=n-k, N(t)=n+1)}{P(N(t)=n+1)} \\ &= \frac{P(N_1(\frac{t}{2})=k, N_2(\frac{t}{2})=n-k, N(t)-N(\frac{t}{2})=1)}{P(N(t)=n+1)} \cdot \frac{P(N(t)=n+1)}{P(N_1(\frac{t}{2})=k) \cdot P(N_2(\frac{t}{2})=n-k) \cdot P(N(t)-N(\frac{t}{2})=1)} \\ &= \frac{P(N_1(\frac{t}{2})=k) P(N_2(\frac{t}{2})=n-k) P(N(\frac{t}{2})=1)}{P(N(t)=n+1)} \cdot \frac{P(N(t)=n+1)}{P(N_1(\frac{t}{2})=k) P(N_2(\frac{t}{2})=n-k) P(N(t)-N(\frac{t}{2})=1)} \\ &= \frac{e^{-\lambda_1 \frac{t}{2}} (\lambda_1 \frac{t}{2})^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\lambda_2 \frac{t}{2}} (\lambda_2 \frac{t}{2})^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{e^{-\lambda \frac{t}{2}} (\lambda \frac{t}{2})^1}{1!} \cdot \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

$$\bullet \text{Var}(N_1(t) - N_2(t)) \stackrel{\{N_1\}, \{N_2\}}{=} \text{Var}(N_1(t)) + \text{Var}(N_2(\frac{t}{2})) = \lambda_1 \cdot t + \lambda_2 \cdot \frac{t}{2}$$

$$P(S_1^{(1)} < S_2^{(2)}) = \int_0^{+\infty} P(S_1^{(1)} < S_2^{(2)} \mid S_2^{(2)}=y) dF_{S_2^{(2)}}(y)$$

$$\begin{aligned} P(X < Y) &\stackrel{\text{O.D.P.}}{=} \int_0^{+\infty} P(X < Y \mid Y=y) dF_Y(y) = \int_0^{+\infty} P(S_1^{(1)} < y \mid S_2^{(2)}=y) dF_{S_2^{(2)}}(y) = \\ &= \int_0^{+\infty} P(S_1^{(1)} < y) dF_{S_2^{(2)}}(y) = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda_1 y}) \frac{\lambda_2^2}{\Gamma(2)} y^1 e^{-\lambda_2 y} dy = \\ &= \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\lambda_2^2}{\Gamma(2)} y e^{-\lambda_2 y} dy}_{\text{свойство функции Эрланга}(2, \lambda_2)} - \int_0^{+\infty} \lambda_2^2 y e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)y} dy = 1 - \frac{\lambda_2^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)} \cdot \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \end{aligned}$$

свойство 6

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ αναγεννητική διαδικασία με $\mu \in (0, +\infty)$, $\sigma^2 \in (0, +\infty)$

i) Να βρεθεί η αναγεννητική εξίσωση για την $h(t) = m(t) - \frac{t}{\mu}$

ii) Να δειχθεί ότι $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu}$

i) $h(t) = m(t) - \frac{t}{\mu} = E(N(t)) - \frac{t}{\mu} = E\left(N(t) - \frac{t}{\mu}\right) \Rightarrow h(t) = \int_0^{+\infty} E(N(t) - \frac{t}{\mu} / S_1 = u) dF_X(u)$

$$E(N(t) - \frac{t}{\mu} / S_1 = u) = \begin{cases} -\frac{t}{\mu}, & u > t \\ 1 + E(N(t-u) - \frac{t-u}{\mu}), & u \leq t \end{cases} \quad \text{(*)} = \begin{cases} -\frac{t}{\mu}, & u > t \\ 1 + h(t-u) - \frac{u}{\mu}, & u \leq t. \end{cases}$$

ορα (*) $h(t-u) = E(N(t-u)) - \frac{t-u}{\mu} = E(N(t-u)) - \frac{t}{\mu} + \frac{u}{\mu}$

Άρα: $h(t) = \int_0^{+\infty} \left(-\frac{t}{\mu}\right) dF_X(u) + \int_0^t \left[1 + h(t-u) - \frac{u}{\mu}\right] dF_X(u) =$
 $= \underbrace{\int_t^{+\infty} \left(-\frac{t}{\mu}\right) dF_X(u)}_{\text{αφ'ωρα}} + \underbrace{\int_0^t \left(1 - \frac{u}{\mu}\right) dF_X(u)}_{\text{αφ'ωρα}} + \underbrace{\int_0^t h(t-u) dF_X(u)}_{\text{αφ'ωρα}}$

► $d(t) = -\frac{1}{\mu} \int_t^{+\infty} t dF_X(u) - \frac{1}{\mu} \int_0^t u dF_X(u) + \int_0^t dF_X(u) = -\frac{1}{\mu} \left[\int_0^{+\infty} t dF_X(u) + \int_0^t u dF_X(u) \right] + F_X(t) =$
 $= -\frac{1}{\mu} \int_0^{+\infty} \min\{t, u\} dF_X(u) + F_X(t) = -\frac{1}{\mu} E(\min\{S_1, t\}) + F_X(t) = -\frac{1}{\mu} \int_0^t (1 - F_X(u)) du + F_X(t)$
 $= -\frac{1}{\mu} \left[\mu - \int_t^{+\infty} (1 - F_X(u)) du \right] + F_X(t) = -\frac{\mu}{\mu} + \frac{\int_t^{+\infty} (1 - F_X(u)) du}{\mu} + F_X(t) = \frac{1}{\mu} \int_t^{+\infty} (1 - F_X(u)) du + F_X(t)$

► $\int_0^{+\infty} d(t) dt = \int_0^{+\infty} d_1(t) dt - \int_0^{+\infty} d_2(t) dt$

• $\int_0^{+\infty} d_1(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mu} (1 - F_X(u)) du = \frac{1}{\mu} \int_0^{+\infty} \left(\int_t^{+\infty} (1 - F_X(u)) du \right) dt = \frac{1}{\mu} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t (1 - F_X(u)) dt \right) du = \frac{1}{\mu} \int_0^{+\infty} u (1 - F_X(u)) du =$
 $= \frac{1}{\mu} \left[\frac{u^2}{2} (1 - F_X(u)) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{2} (-f_X(u)) du = \frac{1}{\mu} \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{2} f_X(u) du = \frac{1}{2\mu} E(X^2) < +\infty$

• $\int_0^{+\infty} d_2(t) dt = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(u)) du = \mu < +\infty \Rightarrow \int_0^{+\infty} |d(t)| dt < +\infty$

απόδειξη
 (σέλιδο 5)

ii) Εφαρμόζοντας B.A.B. $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = \frac{\int_0^{+\infty} d(t) dt}{E(X)} =$
 $= \frac{\int_0^{+\infty} d_1(t) dt - \int_0^{+\infty} d_2(t) dt}{\mu} = \frac{\frac{E(X^2)}{2\mu} - \mu}{\mu} = \frac{\sigma^2 - \mu^2}{2\mu^2}$

$X_1, X_2, X_3, \dots$ ανεξάρτητες και ισονομές τ.μ. $G(x) = E(X_1^k) = \mu_k < +\infty$

Θέμα 3 7/20/2

$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ $\{N(t), t \geq 0\}$ αναντλητή διαδικασία

i) Έστω $A(t) = t - S_{N(t)}$ Να βρεθεί $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E\left(\int_0^t A^2(u) du\right)}{t}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E\left(\int_0^t A^2(u) du\right)}{t} = \frac{E\left(\int_0^{S_1} A^2(u) du\right)}{E(S_1)} \xrightarrow{\text{Στο } [0, S_1] \text{ ισχύει ότι } A(u) = u} \frac{E\left(\frac{S_1^3}{3}\right)}{E(S_1)} = \frac{1}{3} \frac{E(X_1^3)}{E(X_1)} = \frac{\mu_3}{3\mu_1}$$

ii) Αναπτύξτε έκφραση για την $h(t) = E(C(t)^3)$, $C(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$.

$$h(t) = \int_0^{+\infty} E(C^3(t) / S_1 = u) dG(u)$$

$$E(C^3(t) / S_1 = u) = \begin{cases} u^3, & t < u \\ h(t-u), & t \geq u \end{cases}$$

$$\text{Άρα: } h(t) = \int_0^t h(t-u) dG(u) + \underbrace{\int_t^{+\infty} u^3 dG(u)}_{d(t)}$$

$$\Rightarrow d(t) = \int_t^{+\infty} u^3 dG(u) = d_1(t) - d_2(t) \text{ όπου } d(t) = \int_t^{+\infty} u^3 dG(u) < \int_0^{+\infty} u^3 dG(u) = E(X_1^3) = \mu_3$$

Η $d(t)$ είναι μια απεικόνιση, βάλουμε και:

$$\left. \begin{matrix} 0 < t < +\infty \\ t < u < +\infty \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} 0 < u < +\infty \\ 0 < t < u \end{matrix}$$

$$\int_0^{+\infty} |d(t)| dt = \int_0^{+\infty} \int_t^{+\infty} u^3 dG(u) dt = \int_0^{+\infty} \int_0^u dt u^3 dG(u) = \int_0^{+\infty} u \cdot u^3 dG(u) = \int_0^{+\infty} u^4 dG(u) = \mu_4$$

$$\Rightarrow \text{Εφαρμόζοντας B.A.Θ. και έχουμε: } \lim_{t \rightarrow \infty} E(C^3(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \frac{\int_0^{+\infty} d(t) dt}{E(X_1)} = \frac{\mu_4}{\mu_1}$$

(βλ. θέμα 4)

Βωβηα θέμας 3 6/2019

(C_n, D_n) ανακτώντα διαδικασία ποινών $\Rightarrow$ Εφαρμογή Σ.Α.Θ.Κ.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(C(t))}{t} = \frac{E(C_n)}{E(D_n)} = \frac{E(C_1)}{E(D_1)} \quad I = \begin{cases} 1, & D_1 \geq t_0 \\ 0, & D_1 < t_0 \end{cases}$$

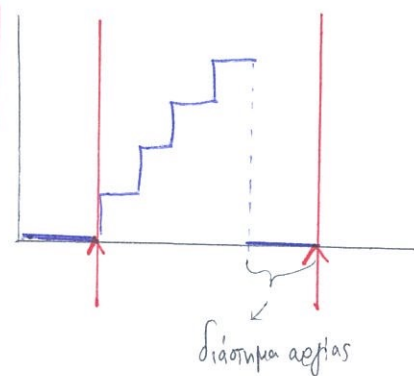
$$E(C_n) = E(a + b \cdot I_{\{D_1 \geq t_0\}} + c \cdot D_1) = a + b \cdot P(D_1 \geq t_0) + c \cdot E(D_1)$$

$$E(D_1) = \int_0^{\infty} t \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda t}}_{\text{G.P.P.}} + \underbrace{\frac{1}{2} \lambda^2 t e^{-\lambda t}}_{\text{Μέση τιμή της exp}(\lambda)} + \underbrace{\frac{1}{2} \lambda^2 t^2 e^{-\lambda t}}_{\text{Μέση τιμή της Erlang}(2, \lambda)} \right) dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\lambda} = \frac{3}{2\lambda}$$

$$P(D_1 \geq t_0) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \lambda^2 t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{2} e^{-\lambda t_0} + \frac{1}{2} \lambda t_0 e^{-\lambda t_0} + e^{-\lambda t_0} \frac{1}{2} = e^{-\lambda t_0} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda t_0 \right)$$

Διαδικασία αφίξης $PP(\lambda) \Leftrightarrow$ Ενδιάμεσοι χρόνοι στις αφίξεις $\sim \exp(\lambda)$ με μέση τιμή $\frac{1}{\lambda}$
 χρόνος εξυπηρέτησης $\sim \exp(\mu)$ με μέση τιμή $\frac{1}{\mu}$. M/M/1

$$E(S) = \frac{1}{\mu - \lambda}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \rho_0 = 1 - \rho, \quad E(Q) = \frac{\rho}{1 - \rho}$$



$\tilde{I}$: χρόνος αφίξης σε έναν κύκλο

$\tilde{\gamma}$: χρόνος αναχώρησης υπηρετί σε έναν κύκλο

Z : χρόνος κύκλου

$$\text{Εχουμε: } E(\tilde{I}) = \frac{1}{\lambda}, \quad E(Z) = E(\tilde{I}) + E(\tilde{\gamma})$$

$$\rho_0 = \text{καθαρό θεωρητικό ποσοστό χρόνου που ο υπηρέτης κάθεται!} \quad 1 - \rho = \rho_0 = \frac{E(\tilde{I})}{E(Z)} \Rightarrow E(Z) = \frac{1}{\lambda(1 - \rho)}$$

$$E(\tilde{\gamma}) = E(Z) - E(\tilde{I}) = \frac{1}{\lambda(1 - \rho)} - \frac{1}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1 - \rho)} \Leftrightarrow E(\tilde{\gamma}) = \frac{\rho}{\lambda(1 - \rho)}$$

σελίδα 3

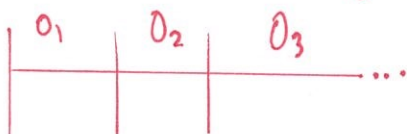
$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} S_i\right) &= E\left[E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} S_i / N(t)\right)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} S_i / N(t)=k\right) P(N(t)=k) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\sum_{i=1}^k S_i / N(t)=k\right) P(N(t)=k) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^k E(S_i / N(t)=k) \cdot P(N(t)=k) \stackrel{\text{Θεώρημα (Campbell)}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^k \frac{1}{k+1} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} \sum_{i=1}^k 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} \lambda^k t^{k+1}}{(k+1)k!} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda t} (\lambda t)^k = \frac{1}{2} \cdot \lambda t = \frac{\lambda t^2}{2}.
\end{aligned}$$

με τον τύπο της $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

Θέμα 3 6/2019

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ χρόνοι λειτουργίας, ανεξαρτητοί και ισονομοί κύκλοι

6.π.π. $f_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda t} + \frac{1}{2} \lambda^2 e^{-\lambda t} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$



κόστος α: ανά κύκλο λειτουργίας

κόστος β: ανά κύκλο λειτουργίας που υπερβαίνει τις t_0 χρονικές μονάδες

κόστος γ: ανά χρονική μονάδα λειτουργίας

► Κατανομή κόστος ρυθμός λειτουργίας της μηχανής.

$(n, O_n) \ n \geq 1$ είναι ανεξάρτητες και ισονομες

$$C_n = a + b \cdot \mathbb{I}_{\{O_n > t_0\}} + c \cdot O_n$$

$(C_n, O_n) = (a + b \cdot \mathbb{I}_{\{O_n > t_0\}} + c \cdot O_n, O_n)$ είναι ανεξ. + ισονομο από το $\{O_n, n \geq 1\}$ είναι ανεξ. + ισονομο

σελίδα 2

Άρα έχουμε αναλυτική διαδικασία κόστους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ.
Σ' ένα Λούνα Παρκ έδέρχονται:

Συνέχεια Θέματος 1 9/2019

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ενήλικες } \{N_1(t), t \geq 0\} \text{ } PP(\lambda_1) \quad \lambda_1 = 5/\text{ώρα} \\ \text{Παιδιά } \{N_2(t), t \geq 0\} \text{ } PP(\lambda_2) \quad \lambda_2 = 25/\text{ώρα} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Ατομα} \\ \{N(t), t \geq 0\} \\ PP(\lambda) \\ \lambda = 30/\text{ώρα} \end{array}$$

5) Δεδομένοι μεθοι χρόνοι εμφάνισης του $10^{\text{ου}}$ και του $34^{\text{ου}}$ ατόμου δεδομένου ότι στην $1^{\text{η}}$ ώρα λειτουργίας εμφανίστηκαν 29 άτομα.

$$E(S_1 / N(1) = 29) \xrightarrow{\text{Θ. Campbell}} 10 \cdot \frac{1}{29+1} = \frac{1}{3}$$

$$E(S_{34} / N(1) = 29) \xrightarrow{34 > 29} 1 + (34 - 29) \cdot \frac{1}{\lambda} = 1 + 5 \cdot \frac{1}{30} = \frac{35}{30}.$$

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ $PP(\lambda)$ 1. $A = E(S_1 / N(t) \geq 1) = ;$

$$\begin{aligned} E(S_1) &= E(S_1 / \{A\}) \cdot P(\{A\}) + E(S_1 / \{A^c\}) \cdot P(\{A^c\}) = \\ &= E(S_1 / N(t) \geq 1) \cdot P(N(t) \geq 1) + E(S_1 / N(t) = 0) \cdot P(N(t) = 0). \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\lambda} = E(S_1 / N(t) \geq 1) \cdot (1 - P(N(t) = 0)) + \left(t + \frac{1}{\lambda}\right) \cdot e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow E(S_1 / N(t) \geq 1) = \frac{1 - e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t} \cdot \lambda t}{\lambda(1 - e^{-\lambda t})}.$$

2. $E\left(\sum_{i=1}^{N(t)} S_i\right) = ;$

66 διδα 1