

Επισκόπηση χρήσιμων γνώσεων
από τη Θεωρία Πιθανοτήτων

Ολοκλήρωμα Riemann

Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$a < t_0 < t_1 < t_2, \dots < t_n = b$$

$\{t_0, \dots, t_n\}$ διαμερίση του $[a, b]$, (π.ε.π. σύνολο)

Κάτω ολοκλήρωμα Riemann ως f : $L(f) = \int_a^b f(x) dx = \sup_{\text{διαμ. του } [a, b]} \left\{ \sum_{i=1}^n \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) (t_i - t_{i-1}) \right\}$

Άνω ολοκ. Riemann ως f : $U(f) = \int_a^b f(x) dx = \inf_{\text{διαμ. του } [a, b]} \left\{ \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) (t_i - t_{i-1}) \right\}$

Εάν $L(f) = U(f)$ τότε f είναι Riemann ολοκληρώσιμη
με ολοκλήρωμα Riemann $= \int_a^b f(x) dx$.

($\forall f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ όπως είναι Riemann ολοκ.)

Ολοκλήρωμα Riemann - Stieljes

Έστω $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ διαμερίση του $[a, b]$
και $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ αυξουσα

Κάτω ολοκλήρωμα R-S της h ως προς φ :

$$\int_a^b h(x) d\varphi(x) = \sup_{\text{διαμ. του } [a, b]} \left\{ \sum_{i=1}^n \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} h(x) (\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})) \right\}$$

Άνω ολοκλήρωμα R-S της h ως προς φ

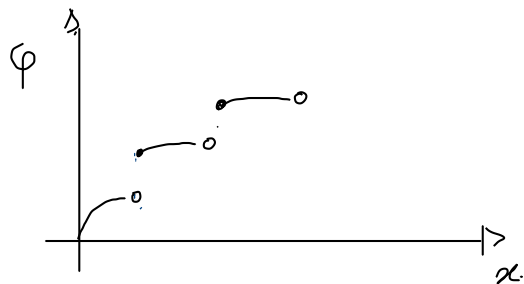
$$\int_a^b h(x) d\varphi(x) = \inf_{\text{διαμ. του } [a, b]} \left\{ \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} h(x) (\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})) \right\}$$

Εσθ. $\int_a^b h(x) d\varphi(x) = \int_a^b h(x) d\varphi(x)$ τότε η h είναι R-S ολοκληρώσιμη
(ως προς φ)

και Ολοκλήρωμα R-S = $\int_a^b h(x) d\varphi(x)$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν η φ είναι κατά τμήματα συνεχής και παραγωγίσιμη μεταξύ των σημείων αδιέξοδος, ή συνεχής



τότε

$$\underbrace{\int_a^b h(x) d\varphi(x)}_{RS} = \underbrace{\sum_{\substack{x \in [a,b] \\ \varphi \text{ αδιέξοδος στο } x}} h(x)(\varphi(x) - \varphi(x^-))}_{\varphi \text{ αδιέξοδος στο } x} + \underbrace{\int_a^b h(x) \varphi'(x) dx}_R$$

Για $\varphi(x) = x$ το ολοκλήρωμα R-S ίδιο με το ολοκλήρωμα R

Αν ϕ είναι σκαρπύρα κατανομής, σημεία αδιέξοδος έχω για διακριτές και μικρές τ.μ.

Forw X τυ.

$$F(x) = P(X \leq x) \text{ σ.k.}$$

$$0 \leq F(x) \leq 1 \quad x \in \mathbb{R}$$

$$F(x_1) \leq F(x_2) \quad x_1 < x_2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} F(x+h) = F(x) \quad (\text{Def. σwerkis})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$$

$$\sum_i x_i P(X = x_i)$$

X διακριτή

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

X σwerkis

$$\sum_i x_i P(X = x_i) + \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

X μικτή

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x)$$

Γενικά $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ως ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes

Έστω X Τμ. με αθροιστική συν. κατανομή $F_X(x) = P(X \leq x)$
Τότε για $g(\cdot)$ συνεχή συνάρτηση έχω:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x)$$

F_X F

από προηγούμενο Θέωρημα:

- For X διακριτή $E[g(X)] = \sum g(x)(F_X(x) - F_X(x^-)) = \sum g(x)P(X=x)$
- For X συνεχής $E[g(X)] = \int g(x) F_X'(x) dx = \int g(x) f(x) dx$

Για X συνεχής, με αρνητική τιμή, σκ $F_X(\cdot)$, σκ $f_X(\cdot)$, $E(T) < \infty$

$$E(X) = \int_0^{\infty} [1 - F_X(x)] dx$$



πράγματι

για X συνεχής

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} [1 - F_X(x)] dx &= \int_0^{\infty} P(X > x) dx = \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} f_X(u) du dx = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^u f_X(u) dx du = \int_0^{\infty} f_X(u) \left(\int_0^u dx \right) du = \int_0^{\infty} \underset{\uparrow}{u} f_X(u) du \\ &= E(X) \end{aligned}$$

As έχουμε $\tau_{nr} = E(\min(X, x))$

X με αρνητική
βασική

$$Y = \min(X, x), \quad Y \geq 0$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^{\infty} P(Y > t) dt = \int_0^{\infty} P(\min(X, x) > t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} P(X > t, x > t) dt = \int_0^{\infty} P(X > t) \mathbb{1}_{\{x > t\}} dt \\ &= \int_0^x P(X > t) dt \end{aligned}$$

(Πολλαδιαστάτες Τ.μ.)

Η διδασαση (X,Y) καλείται συνεχής αν υπάρχει συνάρτηση $f_{X,Y}(x,y)$ τ.ω $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ $x,y \in \mathbb{R}$ και $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1$

και η απο κοινού συνάρτηση κατανομής:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(t,s) ds dt$$

$$P(a < X \leq b, \gamma < Y \leq \delta) = \int_a^b \int_{\gamma}^{\delta} f_{X,Y}(x,y) dy dx$$

και

για κάθε σημείο συνέχειας (x,y) της $F_{X,Y}(x,y)$:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y} = \lim_{\delta x, \delta y \rightarrow 0^+} \frac{P(x < X \leq x + \delta x, y < Y \leq y + \delta y)}{\delta x \delta y}$$

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$ περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X
 $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx$ " " " " " Y
Είναι συναρτήσεις πυκν. πιθαν. (μην αρνητικές + ολοκ = 1.)

$f_{X|Y}(x,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$, $f_Y(y) > 0$
Δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
της τ.μ. X δεδομένης της τ.μ. Y

Δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας και συν. πυκν. πιθανότητας

Έστω (X, Y) διδιάστατη τ.μ. Η συνάρτηση

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y), \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty$$

καλείται X,Y από κοινού (σθροιστική) συνάρτηση κατανομής των X, Y

Η διδιάστατη τ.μ (X, Y) καλείται διακριτή αν με πιθανότητα 1 παίρνει πεπερασμένο ή το πολύ αριθμήσιμο πλήθος τιμών.

$$f_{X,Y}(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j) \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

καλείται από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τ.μ. X, Y

$$f_{X,Y}(x_i, y_j) \geq 0 \quad \forall x_i, y_j \quad \text{και} \quad \sum_i \sum_j f_{X,Y}(x_i, y_j) = 1$$

Η συνάρτηση $f_X(x_i) = \sum_j f_{X,Y}(x_i, y_j)$ καλείται περιθώρια συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X

$$\sum_i f_X(x_i) = 1 \quad (\text{είναι συνάρτηση πιθανότητας})$$

$$f_{X/Y}(x_i/y_j) = \frac{f_{X,Y}(x_i, y_j)}{f_Y(y_j)} \quad i=0,1,\dots \quad \mu \in f_Y(y_j) > 0$$

καλείται δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X δεδομένης της τ.μ. Y

Δεσφευμένη μέση τιμή

$$E(X|A) = \frac{E(X \cdot 1_A)}{P(A)}$$

L = Δεσφευμένη μέση τιμή της τ.μ X
δεδομένου του ευδεχομένου A

μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.

$$E[g(X,Y)] = \begin{cases} \sum_i g(x_i, y_i) P_{X,Y}(x_i, y_i) \\ \int g(x, y) P_{X,Y}(x, y) dx dy \end{cases}$$

→ $E(X|Y=y)$ = $\begin{cases} \sum_x x P_{X,Y}(x, y) & (X, Y) \text{ διακριτή} \\ \int x P_{X,Y}(x, y) dx & (X, Y) \text{ συνεχής} \end{cases}$

συνάρτηση του y
 $m_{X|Y}(y)$
(για δοσμένο y είναι ποσότητα)

Δεσφευμένη μέση τιμή της τ.μ. X δεδομένου (του ευδεχομένου) Y=y

Πραγματ.: $E[X|Y=y] = \frac{E(X \cdot 1_{\{Y=y\}})}{P(Y=y)} = \frac{\sum_x \sum_y x \cdot 1_{\{Y=y\}} P_{X,Y}(x, y)}{P_Y(y)} =$

$$= \frac{\sum_x x P_{X,Y}(x, y)}{P_Y(y)} = \sum_x x \left(\frac{P_{X,Y}(x, y)}{P_Y(y)} \right) = \sum_x x P_{X,Y}(x, y)$$

$E(X|Y)$

Εαν γράψω $E(X|Y)$ Δεσφευμένη μέση τιμή της τ.μ X δοθείσης της τ.μ Y $m_{X|Y}(y)$
τ.μ

$$E(g(X)|Y=y) = \begin{cases} \sum g(x) P_{X,Y}(x, y) \\ \int g(x) P_{X,Y}(x, y) dx \end{cases}$$

X $E(X)$

Προφανώς

$$E(a|Y) = a$$

a σταθερά

(όπου ορίζεται)

$$E(aX + bZ|Y) = aE(X|Y) + bE(Z|Y)$$

$$E(X|Y) \geq 0 \text{ εαε } X \geq 0$$

$$E(g(X)|Y) = E[g(X)] \text{ εαε } X, Y \text{ ανεξ. τ.μ.}$$

$$E(g(X) \underbrace{P(Y)}|Y) = \underbrace{P(Y)} E[g(X)|Y]$$

$$\text{εαε } I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{εαε } \omega \in A \\ 0 & \omega \in A^c \end{cases}$$

$$E(I_A) = P(A)$$

$$X \text{ τ.μ. } \underbrace{I_A(X)} = \begin{cases} 1 & X \in A \\ 0 & X \in A^c \end{cases}$$

$$E[\underbrace{I_A(X)}|Y] = P(X \in A|Y)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΠΛΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΘΔΜΤ Law of Iterated Expectations

Εάν οι μέσες τιμές υπάρχουν:

$$E(X) = E[\underbrace{E(X|Y)}_{\text{απόδειξη}}]$$

HW