ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΠΛΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΘΔΜΤ Law of Iterated Expectations

Εαν οι μέσες τιμές υπάρχουν.

$$\underset{\text{αριθμ.}}{E(X)} = E[\overbrace{E(X|Y)}^{g(Y)}]$$

απόδειξη

$$E[\underbrace{E(X|Y)}_{g(Y)\,=\,Z}] \underset{\text{αφηρημένου μαθηματικού}}{\overset{\text{Τύπος}}{=}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} E[X|Y=y] f_Y(y)\,dy$$

$$\int z f_Z(z)\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X/Y}(x/y)\,dx \right) f_Y(y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}\,dx\, f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = E(X)$$

($E(X) = \sum E(X|B_i)\,P(B_i)$ B_i διαμέριση του Ω)

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω συνάρτηση $h(X)$ τω $\exists$ $E[h(X)]$ και $E[h(X)|Y=y]$

Τότε $E[h(X)] = E[E(h(X)|Y)]$

(Το προηγούμενο ΘΔΜΤ μπορεί να θεωρηθεί ως πόρισμα του

ΕΦΑΡΜΟΓΗ.

Ένας ανθρακωρύχος είναι εγκλωβισμένος σ'ένα ορυχείο με τρεις πόρτες.

Η πόρτα 1 τον οδηγεί στην έξοδο μετά από διαδρομή 2 ωρών

Η πόρτα 2 τον οδηγεί μέσω τούνελ ξανά στην αρχική του θέση μετά από διαδρομή 3 ωρών

Η " 3 " , " " " " " " 5 ωρών

Υποθέτοντας ότι ο ανθρακωρύχος είναι εξίσου πιθανό να διαλέξει κάποια πόρτα κάθε φορά

Ποιος είναι ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι την έξοδο

Λύση

Έστω X ο χρόνος μέχρι την έξοδο, $Y =$ ο # της πόρτας που διαλέγει

$$E(X) = E[E(X|Y)]$$

$$E(X) = E(X|Y=1)\,P(Y=1) + E(X|Y=2)\,P(Y=2) + E(X|Y=3)\,P(Y=3)$$

με $P(Y=1) = P(Y=2) = P(Y=3) = \frac{1}{3}$

και

$E(X|Y=1) = 2$,

$E(X|Y=2) = 3 + E(X)$

$E(X|Y=3) = 5 + E(X)$

Έτσι έχω : $E(X) = 2 \cdot \frac{1}{3} + (3 + E(X)) \cdot \frac{1}{3} + (5 + E(X)) \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow E(X) = 10.$

ΑΣΚΗΣΗ

Δύο εργοστάσια παράγουν λαμπτήρες. Ένας λαμπτήρας απο το εργοστάσιο A δουλεύει κατα μέσο όρο 5000 ώρες, ενώ από το εργοστάσιο B 4000 ώρες. Εάν γνωρίζουμε ότι στο ράφι του super market, 60% των λαμπτήρων είναι από το εργοστάσιο A και 40% από το εργοστάσιο B, ποιος είναι ο αναμενόμενος χρόνος ζωής μιας λάμπας (μιας λαμπτήρας) που αγοράστηκε απο το SM;

L χρονος ζωής του λαμπτήρα

$$E(L) = \underbrace{E(L/A)P(A) + E(L/B)P(B)}_{E\left[E(L/\text{εργοστ.})\right]}$$

$$= 5000 \cdot \frac{60}{100} + 4000 \cdot \frac{40}{100} = 4600$$

Law of total variance

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> (Ασκ 1 σειρας ασκήσεων 1 21-22 Μπουρνέτας)

$V(Y) = E(V(Y|X)) + V(E(Y|X))$

$V(Y) = E(Y-E(Y))^2$ ορισμός

$V(X) = Var(X)$

απόδειξη

Πρώτα θα δείξουμε ότι

$Var(Y|X) \overset{\text{ορ}}{=} E((Y-E(Y|X))^2/X) \overset{\text{θα δείξουμε}}{=} E(Y^2/X) - (E(Y/X))^2$

αυτή είναι η δεσμευμένη περίπτωση της ισότητας $Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

Το οποίο αναμένεται να είναι σωστό. Για $g(X) = E(Y/X)$ είναι

$E((Y-E(Y/X))^2/X) = E(Y^2 - 2g(X)\cdot Y + g^2(X) \mid X) =$

$E(2Yg(X)|X)$

$= E(Y^2|X) - 2g(X)E(Y|X) + g^2(X)$

$= E(Y^2/X) - 2g^2(X) + g^2(X) = E(Y^2/X) - E^2(Y/X)$

Οπότε

$E(V(Y|X)) = E(E(Y^2|X) - g^2(X)) = E(E(Y^2|X)) - E(g^2(X)) \Rightarrow$

$E(V(Y|X)) = E(Y^2) - E(g^2(X))$

Και

$V(E(Y|X)) = V(\underbrace{g(X)}_{Z}) = E(\underbrace{g^2(X)}_{Z^2}) - [E(g(X))]^2 \overset{(*)}{=} E(g^2(X)) - E^2(Y)$

$E(V(Y|X)) + V(E(Y|X)) = E(Y^2) - E^2(Y) = V(Y)$

$E(g(X)) \overset{(*)}{=}$

$E(E(Y/X)) \overset{\text{ΘΔΜΤ}}{=} E(Y)$

Law of total variance

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>: (Ασκ 1 σειράς ασκήσεων 1 21-22 Μπουρνέτας)

$$V(X) = E(V(X|Y)) + V(E(X|Y))$$

$V(X) = Var(X)$

απόδειξη.

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

όπου $E(X^2) = E(E(X^2|Y))$ και $E(X) = E(E(X|Y))$

άρα $V(X) = E(E(X^2|Y)) - (E(E(X|Y)))^2$

αλλά $V(X|Y) = E(X^2|Y) - E^2(X|Y) \Rightarrow E(X^2|Y) = V(X|Y) + E^2(X|Y)$

οπότε $V(X) = E(V(X|Y)) + E(E^2(X|Y)) - E^2(E(X|Y))$

$= E(V(X|Y)) + V(E(X|Y))$

$\Rightarrow Var(X) \geq E(Var(X|Y))$

H/W

(#2 Σειρά ασκήσεων 1, ΣΜΕΣ 21-22 Μπουρνέτας.)

ΑΣΚΗΣΗ 2. Δίνονται τυχαίες μεταβλητές X, Y, όπου η περιθώρια κατανομή της Y είναι $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, ενώ η δεσμευμένη κατανομή της X δεδομένης της τιμής της Y είναι $X|Y = y \sim \mathcal{N}(ay, \sigma^2 y)$. Να υπολογιστούν η μέση τιμή και η διασπορά της X.

Από ΘΔΜ.Τ. $E(X) = E[E(X/Y)]$

$E(X/Y) = aY$

$E(X) = aE(Y) = a\mu_Y$

και

$Var(X) = E(Var(X/Y)) + Var(E(X/Y))$

όπου

$Var(X/Y) = \sigma^2 Y$

$$Var(X) = E(\sigma^2 Y) + Var(aY) = \sigma^2 E(Y) + a^2 V(Y) = \sigma^2 \mu_Y + a^2 \sigma_Y^2$$

Χρήσιμες
Βασικές Δυναμοσειρές

(1) $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ $|z|<1$. Γεωμετρική σειρά

(Θυμηθείτε $\sum_{k=0}^{\infty} (1-p)p^k = 1$ $0<p<1$ $X \sim Geom(p)$
επιτυχιών μέχρι 1^{η} αποτυχία

(2) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$ $\forall z \in \mathbb{R}$ (Θυμηθείτε $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 1$ $X \sim$ Poisson (λ))

Χρησιμο $e^{\lambda} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n$

(3) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k = (1+z)^n$ $\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n \right)$

(4) $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{n} z^k = \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}}$ Αρνητική Διωνυμική

(5) $\sum_{k=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k = \frac{1}{(1-z)^n}$ $|z| \leq 1$

Μπουρνετας

ΑΣΚΗΣΗ 7. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{n} z^k = \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}}.$$

Είναι. $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ $(|z|<1)$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k z^{k-1} = (1-z)^{-2}$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) z^{k-2} = (-2)(-1)(1-z)^{-3}$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2) z^{k-3} = (-3)(-1) \cdot 2(1-z)^{-4}$

$\vdots$

$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) z^{k-n} = n! \, (1-z)^{-(n+1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{n} z^{k-n} = (1-z)^{-(n+1)} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{n} z^k = \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}}$

Βοηθητικό φυλλάδιο Ασκήσεων 1 Οικονόμου

1. Ένας φοιτητής έχει n βιβλία, αριθμημένα ως $1, 2, \ldots, n$. Το βιβλίο k έχει ακριβώς i τυπογραφικά λάθη με πιθανότητα $k^i/(k+1)^{i+1}$, όπου $i = 0, 1, 2, \ldots$ και $k = 1, 2, \ldots, n$. Ο φοιτητής διαλέγει ένα βιβλίο στην τύχη (ομοιόμορφα) και το διαβάζει. Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά του αριθμού των τυπογραφικών λαθών που θα βρει.

Βιντεοδιάλεξη μαθήματος 24 - Χωρίο Α

$$P(N=i \mid K=k) = \frac{k^i}{(k+1)^{i+1}} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^i \frac{1}{k+1}$$

$q^i p$

K = # βιβλίου που επέλεξε, N = # λαθών που βρήκε. Ζητείται $E(N)$, $V(N)$

Είναι $E(N) \overset{\Theta\Delta MT}{=} E(E(N \mid K))$

όπου $E(N/K=k) = \sum_{i=0}^{\infty} i\, P(N=i/K=k) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^i \frac{1}{k+1} = \dfrac{k}{\frac{k}{k+1}}$

αφού:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i \overset{a<1}{=} \frac{1}{1-a} \quad \text{ή} \quad \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot a^{i-1} = \frac{1}{(1-a)^2} \quad \text{ή} \quad \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot a^i = \frac{a}{(1-a)^2} = \frac{\frac{k}{k+1}}{\left(1-\frac{k}{k+1}\right)^2} = k \cdot (k+1)$$

{ή $N|K=k \sim Geom(p)$ $p=\frac{1}{k+1}$, # αποτυχιών μέχρι 1η επιτυχία, μέση τιμή $=\frac{1-p}{p}$}

$$E(N|K) = K.$$

$$E(N) \overset{\Theta\Delta MT}{=} E(E(N|K)) = E[K] \overset{K \sim U(1,\ldots,n)}{=} \frac{n+1}{2}$$

$E(N|K=k) =$

Και $V(N) = E(V(N/K)) + V(E(N/K))$

ας δω πρώτα τον $V(N/K=k) \overset{N|K=k \sim Geom(p)}{=} \frac{1-p}{p^2} = \dfrac{1-\frac{1}{k+1}}{\left(\frac{1}{k+1}\right)^2} = \dfrac{\frac{k}{k+1}}{\frac{1}{(k+1)^2}} = k(k+1)$

$V(K) = E(K^2) - E^2(K)$

οπότε

$$E(V(N|K)) = E(K(K+1)) = E(K^2) + E(K) = V(K) + E^2(K) + E(K)$$

$$= \frac{n^2-1}{12} + \frac{(n+1)^2}{2^2} + \frac{n+1}{2} = \frac{n^2-1+3n^2+6n+3+6n+6}{12}$$

$$= \underbrace{\frac{4n^2+12n+8}{12}}$$

$$V(E(N/K)) = V(K) = \frac{n^2-1}{12}$$

Άρα $V(N) = \dfrac{4n^2+12n+8}{12} + \dfrac{n^2-1}{12} = \dfrac{5n^2+12n+7}{12}$

Βασικό Φυλλάδιο Ασκήσεων 1 Οικονόμου

H/W

2. Μια κάλπη περιέχει a λευκά και b μαύρα σφαιρίδια. Αφού τραβήξουμε ένα σφαιρίδιο, το επανατοποθετούμε στην κάλπη αν είναι λευκό. Αν, όμως, είναι μαύρο, τότε βάζουμε στη θέση του ένα λευκό (από κάποια άλλη κάλπη). Έστω X_n ο αριθμός των λευκών σφαιριδίων στην κάλπη, αφού η διαδικασία έχει επαναληφθεί n φορές.

   1. Αποδείξτε ότι
   $$E[X_{n+1}] = \left(1 - \frac{1}{a+b}\right) E[X_n] + 1.$$

   2. Βρείτε έναν 'κλειστό' τύπο για την $E[X_n]$.

Σημειώσεις τηλεδιδασκαλίας συνάντησης 4 - Χωρίο 4

Βασικό Φυλλάδιο ασκήσεων 1 Οικονόμου

H/W

3. Κάθε φορά που ρίπτεται ένα νόμισμα, προσγειώνεται ως 'κεφαλή' με πιθανότητα p και ως 'γράμματα' με πιθανότητα $1-p$. Να υπολογιστεί ο μέσος αριθμός ρίψεων μέχρι να παρατηρηθεί μια σειρά από r συνεχόμενες κεφαλές.

Σημειώσεις τηλεδιδασκαλίας συνάντησης 1 - Χωρίο 2

Άσκηση

Έστω $X_1, X_2, \dots$ τ.μ. ανεξάρτητες και ισόνομες, $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Να βρεθούν:

(α) $E(S_n / X_1)$ (β) $E(X_1 | S_n)$. $E(X_1 | S_n = s)$

Λύση

(α) $E(S_n | X_1) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n | X_1) = E(X_1 | X_1) + E(X_2 + \dots + X_n | X_1)$

αλλά $X_2, X_3, \dots, X_n$ ανεξάρτητες της X_1

οπότε $E(X_2 + \dots + X_n | X_1) = E(X_2 + \dots + X_n) \overset{\text{ισον.}}{=} (n-1) E(X_1)$

και $E(X_1 | X_1) = X_1$

άρα $E(S_n | X_1) = X_1 + (n-1) E(X_1)$

(β) $E(S_n | S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_1 | S_n) = n \cdot E(X_1 | S_n)$ αφού

X_i έχουν συμμετρικό ρόλο στο άθροισμα S_n

όμως $E(S_n | S_n) = S_n$

Άρα $S_n = n \cdot E(X_1 | S_n) \Rightarrow E(X_1 | S_n) = \dfrac{S_n}{n}$

ΑΣΚΗΣΗ

Διαλέγουμε με τυχαίο τρόπο ένα από τα 2 όμοια νομίσματα που βρίσκονται σ' ένα καπέλο. Το ένα νόμισμα έχει πιθανότητα p_1 να βγεί Γ κατά τη ρίψη του, το άλλο p_2.

Έστω X ο # Γ(Ε) μετά τη ρίψη του επιλεγμένου νομίσματος η φορές → αριθ. δοκιμών

Να βρεθεί $E(X)$, $Var(X)$

> X μίξη 2 Binomial
> γενικά ΔΕΝ είναι Binomial εκτός εάν $p_1 = p_2$

Λύση

Έστω $I = \begin{cases} 1 & \text{διαλέξαμε το νόμισμα με πιθ Γ το } p_1 \text{ με } 1/2 \\ 0 & \text{" " " το } p_2 \text{ με } 1/2 \end{cases}$

$$E(X) = E(E(X|I)) = E(X|I=1)\cdot P(I=1) + E(X|I=0)\cdot P(I=0)$$

$$= n p_1 \cdot \frac{1}{2} + n \cdot p_2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{n(p_1+p_2)}{2}$$

$$Var(X) = Var(E(X|I)) + E(Var(X|I))$$

$Var(X|I=1) = np_1(1-p_1)$ $\qquad Var(X|I=0) = np_2(1-p_2)$

δηλαδή $Var(X|I) = \begin{cases} np_1(1-p_1) & \text{με πιθ } 1/2 \\ np_2(1-p_2) & \text{" " "} \end{cases}$

$E(X|I) = \begin{cases} np_1 & \text{με πιθ } 1/2 \\ np_2 & \text{" "} \end{cases} \Rightarrow Var(E(X|I))$

$$Var(X) = \underbrace{\frac{1}{2}\left(np_1(1-p_1) + np_2(1-p_2)\right)}_{E(Var(X|I))} + \underbrace{(np_1 - np_2)^2 \frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{Var(E(X|I))}$$

$Y = \begin{cases} c_1 & \pi_1 \\ c_2 & \pi_2 \end{cases}$

$E(Y) = c_1\pi_1 + c_2\pi_2$

$E(Y^2) = c_1^2\pi_1 + c_2^2\pi_2$

$Var(Y) = c_1^2\pi_1 + c_2^2\pi_2 - c_1^2\pi_1^2 - c_2^2\pi_2^2 - 2c_1c_2\pi_1\pi_2$

$= c_1^2\pi_1\pi_2 + c_2^2\pi_1\pi_2 - 2c_1c_2\pi_1\pi_2 =$

$= (c_1 - c_2)^2 \pi_1\pi_2$

Ασκηση

Εστω ότι μια μηχανή παράγει αντικείμενα σε μια ημέρα. Ο αριθμός των ελαττωματικών αντικειμένων ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή λ όπου η λ είναι τμ με κατανομή $\Gamma(a,\beta)$

δηλαδή $\lambda \sim \Gamma(a,\beta)$, $X|\lambda \sim Poisson(\lambda) \Longrightarrow E(X|\lambda)=\lambda$ και $Var(X|\lambda)=\lambda$

Να βρεθούν $E(X)$, $Var(X)$

Λύση

$$E(X) \overset{\text{ΘΔΜΤ}}{=} E(E(X|\lambda)) = E(\lambda) = \frac{a}{\beta}$$

$$Var(X) = E(Var(X|\lambda)) + Var(E(X|\lambda)) \quad \text{όπου} \quad Var(X|\lambda)=\lambda$$

άρα $Var(X) = E(\lambda) + Var(\lambda) = \frac{a}{\beta} + \frac{a}{\beta^2} = \frac{a}{\beta}\left(1+\frac{1}{\beta}\right) = \frac{a(\beta+1)}{\beta^2}$

Πιο δύσκολα:

εάν ήθελα να βρω τη $P(X=k) \overset{\text{ΘΟΠ}}{=} \int_0^\infty P(X=k|\lambda=u) f_\lambda(u)\,du$

$$= \int_0^\infty \frac{u^k e^{-u}}{k!} \frac{\beta^a}{\Gamma(a)} u^{a-1} e^{-\beta u}\,du = \frac{1}{k!}\frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(a)}\frac{\beta^a}{(\beta+1)^{k+a}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{(\beta+1)^{k+a} u^{k+a-1} e^{-(\beta+1)u}}{\Gamma(k+a)}\,du}_{1}$$

$$= \frac{(k+a-1)!}{k!\,(a-1)!}\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^a\left(\frac{1}{\beta+1}\right)^k = \binom{k+a-1}{k}\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^a\left(\frac{1}{\beta+1}\right)^k$$

$$X \sim NegBinom\left(a, \frac{\beta}{\beta+1}\right) \qquad E(X) = \frac{a\left(1-\frac{\beta}{\beta+1}\right)}{\frac{\beta}{\beta+1}} = \frac{a}{\beta}$$

αποτυχιών πριν τις a επιτυχίες.

$$Var(X) = \frac{a\left(1-\frac{\beta}{\beta+1}\right)}{\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^2} = \frac{a\,\frac{1}{\beta+1}}{\frac{\beta^2}{(\beta+1)^2}} = \frac{a(\beta+1)}{\beta^2}$$