Μετασχηματισμός Laplace-Stieljes (LST)
transform

(κυρίως
για τη μελέτη κατανομών μη-αρνητικών τμ)

Θυμίζουμε:

Ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$ διαμέριση του $[a,b]$ και $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ αύξουσα.

Κάτω ολοκλήρωμα R-S της f ως προς φ:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,d\varphi(x) = \sup_{\substack{\text{διαμ.}\\ \text{του } [a,b]}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)\big(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})\big) \right\}$$

Άνω ολοκλήρωμα R-S της f ως προς φ

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,d\varphi(x) = \inf_{\substack{\text{διαμ.}\\ \text{του } [a,b]}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)\big(\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})\big) \right\}$$

Εάν $\underline{\int_a^b} f(x)\,d\varphi(x) = \overline{\int_a^b} f(x)\,d\varphi(x)$ τότε η f είναι R-S ολοκληρώσιμη (ως προς φ)

και Ολοκλήρωμα R-S $= \int_a^b f(x)\,d\varphi(x)$

- Εάν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ αύξουσα, δεξιά συνεχής και τμήματα συνεχής και παραγωγίσιμη σε κάθε διάστημα συνέχεια.
Τότε η f είναι R-S ολοκληρώσιμη ως προς τη φ

και

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) = \sum_{\substack{x \text{ σημείο}\\ \text{ασυνέχειας της } \varphi}} f(x)\big(\varphi(x)-\varphi(x^-)\big) + \int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx$$

Έστω X τμ. διακριτή ή απόλυτα συνεχής ή μικτή τότε

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dF_X(x)$$

Πράγματι:

Εάν X διακριτή $\quad E[g(X)] = \sum g(x) P(X=x) = \sum_x g(x) [F_X(x) - F_X(x-1)]$

x σημεία ασυνέχειας της $F_X(x)$

Εάν X συνεχής $\quad E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) (F_X(x))' dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dF_X(x)$

Μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes της $\varphi(x)$ στο $[0,\infty)$ (φ αύξουσα)

$$= \tilde{\varphi}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, d\varphi(x) \qquad s \in D$$

Εάν φ παραγωγίσιμη $\tilde{\varphi}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\varphi'(x)\,dx$ $\qquad \mathcal{L}(\varphi'(x))$ (*)

ο μετασχηματισμός Laplace της φ'

Μετασχηματισμός $\mathcal{L}$-S τυχαίας μεταβλητής X, $X \geq 0$ με σκ $F_X(x)$

αύξουσα
δεξιά συνεχής
τα τμήματα συνεχής
παραγωγίσιμη στα τμήματα συνέχειας.

$$\mathcal{L}_X(s) \quad \underbrace{\boxed{\tilde{F}_X(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF_X(x)}}_{\text{Σχόλια}} = E(e^{-sX})$$

Εάν X διακριτή $\qquad \tilde{F}_X(s) = \sum_{x \geq 0} e^{-sx} P(X=x) = P_X(e^{-s})$

Εάν X συνεχής $\qquad \tilde{F}_X(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_X(x)\,dx = \mathcal{L}(f(x))$

(*) Να θυμίσουμε $\mathcal{L}(f(x)) = \int_0^\infty e^{-sx} f_X(x)\,dx$ ο Laplace μετασχηματισμός της f

Ροπογεννήτρια
$$E(e^{tX}) = \begin{cases} \int_{-\infty}^\infty e^{tx} f_X(x)\,dx & X \text{ συνεχής} \\ \sum_x e^{tx} f_X(x) & X \text{ διακριτή} \end{cases}$$
$(E(e^{tX}) = p_X(e^t)$, p_X πιθανογεννήτρια

Χαρακτηριστική συνάρτηση
$\exists$ πάντα.
$$E(e^{itX}) = \begin{cases} \int_{-\infty}^\infty e^{itx} f_X(x)\,dx \\ \sum_x e^{itx} f_X(x)\,dx. \end{cases}$$

$\int_{-\infty}^\infty e^{itx}\, dF_X(x)$ Μετασχηματισμός Fourier-Stieltjes

Παρατηρήσεις - ιδιότητες

1] εαν X συνεχής τμ. $\tilde{F}_X(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx = \mathcal{L}\{f\}(s)$

2] $\tilde{F}_X(-s) = E(e^{sX}) = M_X(s)$ ροπογεννήτρια της X

ή $\tilde{F}_X(s) = M_X(-s)$

3] Εαν X διακριτή τμ $\tilde{F}_X(s) = \sum_x e^{-sx} P(X=x) = P_X(e^{-s})$ πιθανογεννήτρια της X

4] $\tilde{F}_X(0) = 1$, $\tilde{F}_X(s)$ συγκλίνει τουλάχιστον στο $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) \geq 0\}$

5] $\tilde{F}_X(s) = \tilde{F}_Y(s) \Leftrightarrow X, Y$ ισόνομες (Χαρακτηρίζει την κατανομή)

6] $E(X^r) = (-1)^r \tilde{F}_X^{(r)}(0)$. Απόδειξη

$\tilde{F}_X(s) = E(e^{-sX}) \Rightarrow \tilde{F}_X^{(r)}(s) = E((-X)^r e^{-sX}) \xRightarrow{s=0}$

$\tilde{F}_X^{(r)}(0) = E[(-X)^r] = (-1)^r \cdot E(X^r)$

$\left(e^{-sx}\right)'' = e^{-sx}(-s)^2$

7] $X_1, .., X_n$ ανεξ τμ, $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $\tilde{F}_{S_n}(s) = \prod_{i=1}^n \tilde{F}_{X_i}(s) \overset{\text{ισον.}}{=} [\tilde{F}_X(s)]^n$

απόδειξη: $\tilde{F}_{S_n}(s) = E(e^{sS_n}) = E(e^{sX_1} \cdot \dots \cdot e^{sX_n}) \underset{\text{ανεξ}}{=} E(e^{sX_1}) \cdot \dots \cdot E(e^{sX_n})$

$= \tilde{F}_{X_1}(s) \cdot \dots \cdot \tilde{F}_{X_n}(s)$

8] $X_1, X_2, \dots$ ακολουθία ανεξ & ισονομων τμ, $N \geq 0$ ανεξ τμ των X_i, $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$ τυχαίο αθροισμα

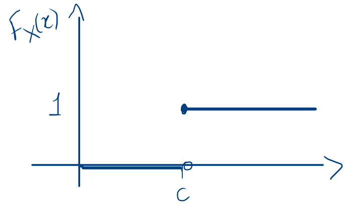
$\tilde{F}_{S_N}(s) = P_N(\tilde{F}_X(s))$

απόδειξη: $\tilde{F}_{S_N}(s) = E(e^{sS_N}) = E[E(e^{sS_N} | N)] = E(\tilde{F}_{X_1}^N(s)) = P_N(\tilde{F}_{X_1}(s))$

$E(z^N) = P_N(z)$

Βασικά παραδείγματα

• Έστω $P(X=c)=1 \quad c\geq 0$



$$F_X(x)=\begin{cases}1 & x\geq c\\ 0 & x<c\end{cases}$$

$$\underbrace{\tilde F_X(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,dF(x)}=\sum_x e^{-sx}P(X=x)=e^{-sc}$$

$e^{-sc}\cdot P(X=c)$

(για $c=0$ $\tilde F_X(s)=1$)

• $X\sim\exp(\lambda),\ \lambda>0$

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & \text{διαφ.}\end{cases}\qquad F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$\tilde F_X(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\lambda e^{-\lambda x}\,dx=\frac{\lambda}{\lambda+s}\qquad E(X)=-\tilde F_X'(0)=\frac{1}{\lambda}$$

$$=\frac{\lambda}{(\lambda+s)}\underbrace{\int_0^\infty(\lambda+s)\,e^{-(\lambda+s)x}\,dx}$$

$$\frac{\beta^{a}}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\beta x}$$

(Για $\phi(x)=x^n \quad n\geq 1$

$$\tilde\phi(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\,d\phi(x)=\int_0^\infty e^{-sx}\,n\,x^{n-1}\,dx=\frac{n\cdot\Gamma(n)}{s^n}\underbrace{\int_0^\infty\frac{s^n}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-sx}\,dx}_{\text{σππ } Er(n,s)}$$

$$=\frac{n\cdot(n-1)!}{s^n}=\frac{n!}{s^n}\ )$$

Laplace-Stieltjes μετασχηματισμός & συνέλιξη

Έστω X_1 τμ. με σκ $F_{X_1}(\cdot)$, μετασχ. L-S $\tilde{F}_{X_1}(s)$

X_2 " $F_{X_2}(\cdot)$ " " $\tilde{F}_{X_2}(s)$, X_1, X_2 ανεξ τμ

Για $S = X_1 + X_2$ είναι $\tilde{F}_S(s) = \tilde{F}_{X_1}(s) \cdot \tilde{F}_{X_2}(s)$ (1)

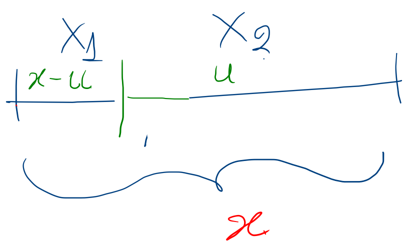
συνέλιξη $F_S(x) = P(X_1 + X_2 \le x) = \int_0^x P(X_1 + X_2 \le x \mid X_2 = u)\, dF_{X_2}(u) \Rightarrow$

$\cancel{P(X_1 + u \le x \mid X_2 = u)} = P(X_1 \le x - u \mid X_2 = u)$

$$F_S(x) = \int_0^x \underbrace{P(X_1 \le x - u)}\, dF_{X_2}(u)$$

ή $\boxed{F_S(x) = \int_0^x F_{X_1}(x-u)\, dF_{X_2}(u)}$ συνέλιξη! $\int_0^x F_{X_2}(x-u)\, dF_{X_1}(u)$

ή $F_S(x) = (F_{X_1} * F_{X_2})(x)$ (2)



$$\widetilde{(F_{X_1} * F_{X_2})}(s) = \tilde{F}_{X_1}(s) \cdot \tilde{F}_{X_2}(s)$$

$$\tilde{F}_S(x) = \tilde{F}_{X_1}(s) \cdot \tilde{F}_{X_2}(s)$$

$$F_{S_n}(x) = (F_{S_{n-1}} * F_{X_n})(x)$$

H/W για exp

Για $Z = \begin{cases} X & \text{με πιθ } p \\ Y & \text{'' } 1-p \end{cases}$

$$\boxed{F_Z(z) = p\,F_X(z) + (1-p)\,F_Y(z)}$$

$$\not\Downarrow$$

$$\tilde{F}_X(s) = p\,\hat{F}_X(s) + (1-p)\,\tilde{F}_Y(s)$$

$$\widetilde{F_X}(x) = \widetilde{c_1 F_{X_1}(x) + c_2 F_{X_2}(x)} = c_1 \widetilde{F_1}(x) + c_2 \widetilde{F_2}(x)$$

Άσκηση

Έστω X_1, X_2 ανεξ τμ $X_1 \sim exp(\lambda)$, $X_2 \sim exp(\mu)$, $\lambda \neq \mu$.

Ποια είναι η κατανομή της $S = X_1 + X_2$;

Λύση

$$\tilde{F}_S(s) = \tilde{F}_{X_1}(s) \cdot \tilde{F}_{X_2}(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s} \cdot \frac{\mu}{\mu+s} = \frac{A}{\lambda+s} + \frac{B}{\mu+s} \qquad (1)$$

$\cdot(\lambda+s) \Rightarrow$

Έχω $$\frac{\lambda \cdot \mu}{\mu+s} = A + \frac{B(\lambda+s)}{\mu+s} \xrightarrow{\text{για } s=-\lambda} \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda} = A$$

όμοια $$\frac{\lambda\mu}{\lambda+s} = \frac{A(\mu+s)}{\lambda+s} + B \xrightarrow{\text{για } s=-\mu} \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu} = B$$

Έτσι

$$\tilde{F}_S(s) = \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}\frac{1}{\lambda+s} - \frac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}\frac{1}{\mu+s} = \frac{\mu}{\mu-\lambda}\frac{\lambda}{\lambda+s} - \frac{\lambda}{\mu-\lambda}\frac{\mu}{\mu+s}$$

$$F_S(x) = \frac{\mu}{\mu-\lambda}\left[1-e^{-\lambda x}\right] - \frac{\lambda}{\mu-\lambda}\left[1-e^{-\mu x}\right]$$

Άσκηση (θα τη πω ως ιδιότητα στην Εκθετική)!

εδώ ως ~~H/W~~

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim exp(\lambda)$, $\lambda > 0$ και $N \sim Geom(p)$,

N ανεξάρτητα των $X_1, \ldots X_n$

$P(N=n) = (1-p)^{n-1} \cdot p \quad n = 1, 2, \ldots$ (# δοκιμών μέχρι 1η επιτ.)

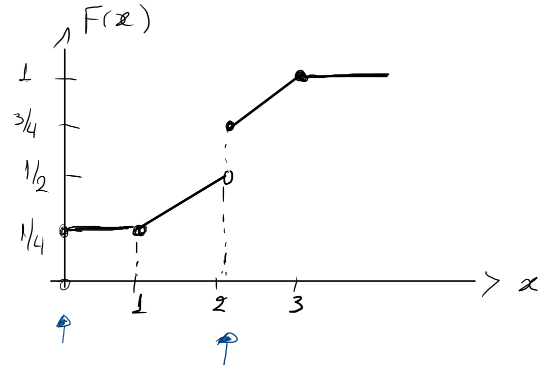
$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \sim \, ;$$

Λύση

ΑΣΚΗΣΗ 11. Δίνεται τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{x}{4}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{x+1}{4}, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$

Να υπολογιστεί η μέση τιμή $E(X)$ και ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes $\tilde{F}_X(s)$.



$$f_X(x) = \begin{cases} 1/4 & x = 0 \\ 1/4 & x = 2 \\ \frac{1}{4} & 1 \le x \le 3,\ x \ne 2 \end{cases} \qquad F(2^+) - F(2^-)$$

$$E(X) = 0\cdot\left(\frac{1}{4} - 0\right) + \int_1^2 x\,\frac{1}{4}\,dx + 2\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{4}\right) + \int_2^3 x\,\frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + 2\,\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\Big|_2^3 = \frac{1}{8}(9-1) + \frac{1}{2}$$

$$= 3/2$$

$$\tilde{F}_X(s) = e^{-s\cdot 0}\left(\frac{1}{4} - 0\right) + \underbrace{e^{-s\cdot 2}\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{4}\right)} + \int_1^2 e^{-sx}\,\frac{1}{4}\,dx + \int_2^3 e^{-sx}\,\frac{1}{4}\,dx$$

$$E(X) = \int x\,dF(x)$$

Αναστροφή μετασχηματισμού L-S

Αν $\tilde{F}(s) = \dfrac{s^2-2}{s^3+3s^2+2s} = \dfrac{a}{s} + \dfrac{b}{s+1} + \dfrac{c}{s+2}$

$a = -1$
$b = 1$
$c = 1$

ή $\left.\dfrac{s^2-2}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = \left. a + \dfrac{bs}{s+1} + \dfrac{cs}{s+2} \right|_{s=0}$

$\Rightarrow \dfrac{-2}{2} = a$ ή $a = -1$

και $\left.\dfrac{s^2-2}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = \left. b + \dfrac{a(s+1)}{s} + \dfrac{c(s+1)}{s+2} \right|_{s=-1}$

$\dfrac{1-2}{-1(-1+2)} = b$ ή $b = 1$

και $\left.\dfrac{s^2-2}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = \left. \dfrac{a(s+2)}{s} + \dfrac{b(s+2)}{s} + c \right|_{s=-2}$

$\dfrac{4-2}{-2\cdot(-2+1)} = c$ ή $c = 1$

Άρα

$\dfrac{s^2-2}{s(s+1)(s+2)} = \dfrac{-1}{s} + \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{2}{s+2}$

$\parallel$ $\mathcal{L}(f(s))$

$\Rightarrow f(t) = -1\,e^{0\cdot t} + 1\,e^{-1\cdot t} + \dfrac{1}{2}\,e^{-2t}$

$\dfrac{\lambda}{\lambda+s}$

κεφ 1 20 - 21 Οικονόμου

H/W

5. Έστω X, Y και Z ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με ρυθμούς λ, λ και μ αντίστοιχα, με $\lambda \neq \mu$. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes της $X + Y + Z$ και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς της.
Σημειώσεις τηλεδιδασκαλίας συνάντησης 3 - Χωρίο 4