Εκθετική Κατανομή

Χρησιμοποιείται: - για χρόνο ζωής μιας μηχανής (χρόνος μέχρι αποτυχία)
- για χρόνο μέχρι την άφιξη $1^{ου}$ πελάτη
- για χρόνο ανάμεσα σε διαδοχικές αφίξεις πελατών
- για χρόνο εξυπηρέτησης μιας εργασίας ...

Είναι σε συνεχή χρόνο ότι είναι η γεωμετρική σε διακριτό χρόνο.

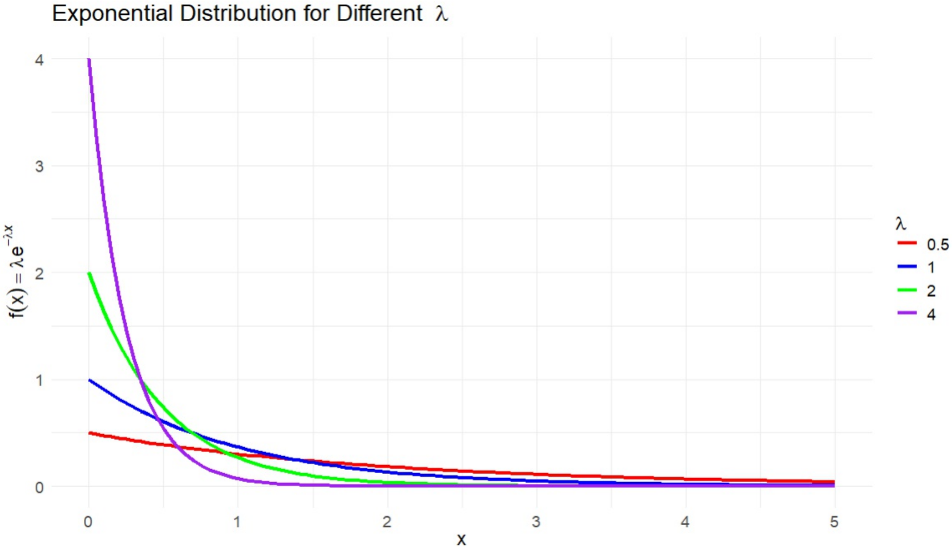
σππ $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ $\qquad (X \sim exp(\lambda))$

σκ

$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ $\qquad$ LST $\tilde{F}_X(s) = \dfrac{\lambda}{\lambda + s}$

$E(X^n) = \dfrac{n!}{\lambda^n}$ $\qquad E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ $\qquad V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

(μπορούμε $= \int_0^\infty (1 - F_X(x))dx = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx$)



Παρατήρηση:

Για $U \sim U(0,1)$ και $X = -\frac{1}{\lambda}\ln U$. έχω $X \sim \exp(\lambda)$

$P(-\frac{1}{\lambda}\ln U \le x)$

Πράγματι $F_X(x) = P[-\ln U \le \lambda x] = P[U \ge e^{-\lambda x}] = 1 - e^{-\lambda x}$

$P(U \le u) = u$ $\qquad 1-u.$

$= \int_a^u f_U(t)\,dt.$

$U(a,b)$ $\qquad f_U(u) = \frac{1}{b-a}$ $\qquad F_U(u) = P(U \le u) = \frac{u-a}{b-a}$ $\quad u<b$

$b>a.$

$1 \quad u>b$

$u<$

Ιδιότητες της εκθετικής κατανομής

① ΑΜΝΗΜΟΝΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

προφανώς

$$P(\underbrace{X-s}_{\text{υπολοιπόμενος χρόνος ζωής}} > t \,/\, \underbrace{X>s}_{\text{ηλικία ήδη } s}) = P(X>t+s \,/\, X>s) \quad \forall t\geq 0, s>0$$

Ισχύει $\boxed{P(X-s>t \,/\, X>s) = P(X>t)}$

$A=\{X>t+s\}$ $\quad B=\{X>s\}$ απόδειξη

$$P(X>t+s/X>s) = \frac{P(X>t+s,\ X>s)}{P(X>s)} = \frac{P(X>t+s)}{P(X>s)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X>t)$$

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Η δεσμευμένη πιθανότητα ο χρόνος ζωής X να συνεχίσει άλλες t χρονικές μονάδες δεδομένου ότι έχει ήδη λειτουργήσει t = πιθανότητα να λειτουργήσει τουλάχιστον t όταν είναι καινούρια

$$P(X>t+s) = P(X>t)\cdot P(X>s) \quad \text{ή} \quad \bar F(t+s) = \bar F(t)\cdot \bar F(s)$$

Επαγωγικά δείχνουμε ότι $\bar F(t_1+t_2+\cdots+t_n) = \bar F(t_1)\cdots\cdots \bar F(t_n)$

για $\forall\, t_1,t_2,\ldots,t_n>0$

ΠΡΟΤΑΣΗ

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t)$$ (Δες και σημειώσεις Θ. Αξιοπίστιας)

Έστω X μια αρνητική τμ (που δεν είναι ταυτοτικά 0) έχει την ιδιότητα

$=\bar{F}(t_2)$ $\quad \bar{F}(t_1 + \cdots + t_n) = \bar{F}(t_1) \cdot \ldots \cdot \bar{F}(t_n) \quad t_1, t_2, \ldots, t_n > 0$ (*)

ανν X ακολουθεί εκθετική κατανομή

απόδειξη

($\Rightarrow$)

Έστω $n \in \mathbb{N}$ $\quad t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 1$, η (*) γράφεται $\bar{F}(n) = (\bar{F}(1))^n$.

αλλα

$$\bar{F}(1) = \bar{F}(\underbrace{\tfrac{1}{m} + \cdots + \tfrac{1}{m}}_{m \text{ όροι}}) = \left[\bar{F}\left(\tfrac{1}{m}\right)\right]^m \Rightarrow \bar{F}\left(\tfrac{1}{m}\right) = \left(\bar{F}(1)\right)^{1/m} \quad (**)$$

Έστω $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$ $\quad q = \frac{n}{m}$

$$\bar{F}(q) = \bar{F}\left(\frac{n}{m}\right) = \left[\bar{F}\left(\frac{1}{m}\right)\right]^n \overset{**}{=} \left[\bar{F}(1)\right]^{\frac{n}{m}} = \left[\bar{F}(1)\right]^q$$

Όμως $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$ $\exists q_n \in \mathbb{Q}$: $\lim_{n\to\infty} q_n = x$. Επειδή $\bar{F}$ συνεχής έχω

$$\bar{F}(x) = \bar{F}(\lim_{n\to\infty} q_n) = \lim_{n\to\infty} \bar{F}(q_n) = \lim_{n\to\infty} \left[\bar{F}(1)\right]^{q_n} = \left[\bar{F}(1)\right]^{\lim_{n\to\infty} q_n} = \left[\bar{F}(1)\right]^x$$

Οπότε αφού $\lim_{x\to\infty} \bar{F}(x) = 0$, παίρνω $\lim_{x\to\infty} [\bar{F}(1)]^x = 0$ οπότε $0 \le \bar{F}(1) < 1$

Αλλά $\bar{F}(1) > 0$ αλλιώς $\bar{F}(x) = 0$ για $x \geq 0 \Rightarrow P(X=0) = 1$ άτοπο

Άρα $0 < \bar{F}(1) < 1$

$$\bar{F}(x) = [\bar{F}(1)]^x = e^{x \ln(\bar{F}(1))} = e^{-\lambda x} \quad \text{για } \lambda = -\ln(\bar{F}(1)) > 0$$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

(2) ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

$X \sim exp(\lambda)$, $a > 0$ $\Rightarrow$ $Y = aX \sim exp\left(\frac{\lambda}{a}\right)$

$E(X) = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

απόδειξη.

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(aX \leq y) = P\left(X \leq \frac{y}{a}\right) = F_X\left(\frac{y}{a}\right) = 1 - e^{-\lambda \frac{y}{a}}$

$$= \begin{cases} 1 - e^{-\frac{\lambda}{a} \cdot y} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

Άρα $Y \sim exp\left(\frac{\lambda}{a}\right)$

Εάν μπορεί γράψω $X \sim exp(\beta)$

β παράμετρος κλίμακας

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$E(X) = \beta$

$E(Y) = E(aX) = aE(X) = \frac{a}{\lambda}$

③ ΙΣΧΥΡΗ ΑΜΝΗΜΟΝΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ

Έστω $X \sim \exp(\lambda)$, Y τμ ανεξ. της X, $Y \geq 0$ Τότε

$$P(X > Y+t \mid X > Y) = P(X > t)$$

Μπουρνέτας

ΑΣΚΗΣΗ 15. Έστω τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ και Y τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη της X με συνάρτηση κατανομής $F_Y(y)$. Δείξτε την ισχυρή αμνήμονη ιδιότητα

$$P(X > Y+t \mid X > Y) = P(X > t), \forall t \geq 0.$$

απόδειξη

$$P(X > Y+t \mid X > Y) = \frac{P(X > Y+t, X > Y)}{P(X>Y)} = \frac{P(X>Y+t)}{P(X>Y)}$$

όπου

$$P(X > Y) = \begin{cases} \sum_{y=0}^{\infty} P(X > Y \mid Y=y)\, P(Y=y) \\ \int_0^{\infty} P(X>Y \mid Y=y)\, f_Y(y)\,dy \end{cases}$$

ΧΒΓ θα δείξουμε για τη συνεχή περίπτωση

$$= \int_0^{\infty} P(X > y)\, f_Y(y)\,dy = \int_0^{\infty} e^{-\lambda y}\, dF_Y(y) = \tilde{F}_Y(\lambda)$$

όμοια $P(X > Y+t) = \int_0^{\infty} P(X > y+t)\, dF_Y(y) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(y+t)} dF_Y(y) = e^{-\lambda t} \tilde{F}_Y(\lambda)$

Άρα $P(X > Y+t \mid X > Y) = e^{-\lambda t} = P(X > t)$

(4) Ιδιότητα για το min των $\{X_1 \dots X_n\}$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξ. τμ, $X_i \sim exp(\lambda_i)$ $1 \le i \le n$.

Θέτοντας $X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ και $N = j \Leftrightarrow X_{(1)} = X_j$, έχουμε

$$P(N = i, X_{(1)} > z) = \frac{\lambda_i}{\lambda} e^{-\lambda z} \qquad z \ge 0, \quad 1 \le i \le n$$

όπου $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

απόδειξη

$$P(N = i, X_{(1)} > z) = P(X_j > X_i > z, \; j \ne i, \; 1 \le j < n) =$$

$$= \int_0^\infty P(X_j > X_i > z, j \ne i, 1 \le j \le n \,/\, X_i = x) \lambda_i e^{-\lambda_i x} dx =$$

$$= \int_z^\infty \underbrace{P(X_j > x, \; j \ne i, \; 1 \le j \le n)}_{P(X_j > x > z \quad j \ne i \; 1 \le j \le n \,|\, X_i = x)} \lambda_i e^{-\lambda_i x} dx =$$

$$= \int_z^\infty \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} P(X_j > x) \cdot \lambda_i e^{-\lambda_i x} dx =$$

$$= \int_z^\infty \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} e^{-\lambda_j x} \lambda_i e^{-\lambda_i x} dx = \int_z^\infty \lambda_i e^{-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x} dx$$

$$= \lambda_i \int_z^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda_i}{\lambda} e^{-\lambda z}$$

$$\frac{\lambda_i}{\lambda} \underbrace{\int_z^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Υπό τις υποθέσεις του προηγούμενου Θεωρήματος

(1) $P(N=i) = \dfrac{\lambda_i}{\lambda} \qquad 1 \le i \le n \qquad \dfrac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$

(2) $P(X_{(1)} > z) = e^{-\lambda z} \qquad z \ge 0.$ Δηλαδή $X_{(1)} \sim \exp(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$

απόδειξη

(1) $$P(N=i) = \lim_{z \to 0} \overbrace{P(N=i, X_{(1)} > z)}^{=\frac{\lambda_i}{\lambda} e^{-\lambda z}} = \frac{\lambda_i}{\lambda}$$

ή αναλυτικά $$P(N=i) = P(X_i < X_j \ \forall j \ne i \ \ 1 \le j < n) =$$
$$= \int_0^\infty P(X_i < X_j, \forall j \ne i, 1 \le j \le n \mid X_i = x)\, \lambda_i e^{-\lambda_i x}\, dx$$
$$= \int_0^\infty \prod_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} P(X_j > x)\, \lambda_i e^{-\lambda_i x}\, dx = \frac{\lambda_i}{\lambda}$$

(2) $$P(X_{(1)} > z) = \sum_{i=1}^{n} P(N=i, X_{(1)} > z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} e^{-\lambda z} = \frac{1}{\cancel{\lambda}} e^{-\lambda z} \cancel{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = e^{-\lambda z}$$

$$\Rightarrow P(X_{(1)} \le z) = 1 - e^{-\lambda z}$$

ή αναλυτικά $$P(X_{(1)} > z) = P(X_1 > z, \dots, X_n > z) = P(X_1 > z) \cdot \ldots \cdot P(X_n > z)$$
$$= e^{-\lambda_1 z} \cdot \ldots \cdot e^{-\lambda_n z} = e^{-\lambda z} \qquad z \ge 0$$

Το αρχείο για την εκθεσική καταγραφή θα ολοκληρωθεί στο επόμενο μάθημα