

ΑΣΚΗΣΗ 000001Α.

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ διαδικασία Poisson με ρυθμό λ ($PP(\lambda)$)

Να υπολογίσουμε την αναμ. βάρωση $m_X(t) = E(N(t))$

(i) χρησιμοποιώντας τον αναμενόμενο ορισμό
(ii) " " " "

(i) $X_1, X_2, \dots \sim \exp(\lambda)$ $F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ $t > 0$

$$\tilde{F}_X(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}$$

$$\tilde{m}_X(s) = \frac{\tilde{F}_X(s)}{1 - \tilde{F}_X(s)} = \frac{\lambda}{s} \xrightarrow{H/W} m(t) = \lambda t$$

(ii)

$$P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$m_X(t) = E(N(t)) = \lambda t$$

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ PP(λ), $\lambda = 0.5$. Να βρεθούν οι πιθανότητες

(i) να μη υπάρξει γεγονός στο $(3, 5]$

(ii) να υπάρξει ακριβώς μία φορά γεγονός στα διαστήματα $(0, 1], (1, 2], (2, 3], (3, 4]$

$$P(N(t) = n) = e^{-0.5t} \cdot \frac{(0.5t)^n}{n!} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(i) \underset{\text{προς.}}{P(N(5) - N(3) = 0)} \overset{\text{αμσ}}{=} P(N(2) - N(0) = 0) = e^{-0.5 \cdot 2} \frac{(0.5 \cdot 2)^0}{0!} = e^{-1}$$

$$(ii) \underset{\text{προς. αμσ}}{P(N(1) - N(0) = 1, N(2) - N(1) = 1, N(3) - N(2) = 1, N(4) - N(3) = 1)} =$$

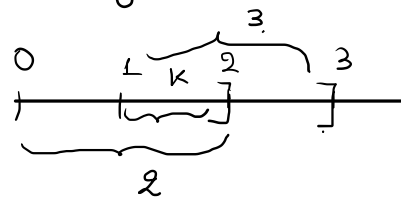
$$= P(N(1) - N(0) = 1) P(N(2) - N(1) = 1) P(N(3) - N(2) = 1) P(N(4) - N(3) = 1) =$$

$$\overset{\text{αμσ}}{=} \underset{\text{προς. αμσ}}{P(N(1) - N(0) = 1) \cdot P(N(1) - N(0) = 1) P(N(1) - N(0) = 1) P(N(1) - N(0) = 1)} =$$

$$= [P(N(1) = 1)]^4 = \left[e^{-0.5 \cdot 1} \frac{(0.5 \cdot 1)^1}{1!} \right]^4 = e^{-2} \frac{1}{2^4}$$

ΑΣ ΚΗΣΗ

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ $PP(\lambda)$. Βρείτε τη πιθανότητα να είναι 2 γεγονότα στο $(0, 2]$ και 3 γεγονότα στο $(1, 4]$



$$P(N(2) - N(0) = 2, N(4) - N(1) = 3)$$

$$= \sum_{k=0}^{\min(2,3)} P(N(2) - N(0) = 2, N(2) - N(1) = k, N(4) - N(1) = 3) =$$

$$= \sum_{k=0}^2 P(N(1) - N(0) = 2 - k, N(2) - N(1) = k, N(4) - N(2) = 3 - k) =$$

$$\stackrel{\text{ανεξ. γεγον.}}{\stackrel{\text{πρ.σ.σ.}}{=}} \sum_{k=0}^2 P(N(1) - N(0) = 2 - k) \cdot P(N(2) - N(1) = k) P(N(4) - N(2) = 3 - k) =$$

$$\stackrel{\text{ομογ. πρ.σ.σ.}}{=} \sum_{k=0}^2 P(N(1) - N(0) = 2 - k) P(N(1) - N(0) = k) P(N(2) - N(0) = 3 - k) =$$

$$= \sum_{k=0}^2 e^{-1} \frac{1^{2-k}}{(2-k)!} e^{-1} \frac{1^k}{k!} e^{-1 \cdot 2} \frac{(2 \cdot 2)^{3-k}}{(3-k)!} = \sum_{k=0}^2 \frac{e^{-4} 1^{5-k} 2^{3-k}}{(2-k)! \cdot k! \cdot (3-k)!}$$

2. Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ . Να υπολογιστεί η συνδιακύμανση

$$\text{Cov}[N(t), N(s)].$$

Φυλ. Βασ. Ασκήσεων
Οικονομικών

Έστω $t \geq s > 0$

$$\begin{aligned} \underline{\text{Cov}(N(t), N(s))} &= \text{Cov}(\underbrace{N(t) - N(s)}_{\text{"0 λόγω ανεξ."}} + \underline{N(s)}, N(s)) \\ &= \underbrace{\text{Cov}(N(t) - N(s), N(s))}_{\text{"0 λόγω ανεξ."}} + \text{Cov}(N(s), N(s)) \\ &= \underbrace{0}_{\text{"0 λόγω ανεξ."}} + \text{Var}(N(s)) = \lambda \cdot s. \end{aligned}$$

$$\text{Cov}(N(t), N(s)) = \lambda \cdot \min(t, s)$$

4. Υποθέτουμε ότι πελάτες φθάνουν σε μια τράπεζα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 8 πελάτες την ώρα. Να υπολογιστούν τα ακόλουθα:

1. Η μέση τιμή και η διασπορά του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα μέσα σε ένα οκτάωρο λειτουργίας της τράπεζας.
2. Η πιθανότητα κανείς πελάτης να μη μπει στην τράπεζα τα τελευταία 15 λεπτά μιας εργάσιμης μέρας.
3. Η συνδιακύμανση του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα μεταξύ 9.00 και 11.00 και του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα την ίδια μέρα μεταξύ 10.00 και 11.00.
4. Η συνδιακύμανση του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα μεταξύ 9.00 και 11.00 και του αριθμού των πελατών που μπαίνουν στην τράπεζα την επόμενη μέρα μεταξύ 10.00 και 11.00.

Φυλλάδιο Βασιτών
αεικίσεων Οικονόμου

$$N(t) = \# \text{ ηελατών στο διάστημα } (0, t] \quad \{N(t), t \geq 0\} \quad PP(8)$$

$$P(N(t) = k) = e^{-8t} \frac{(8t)^k}{k!} \quad k=0,1,2,\dots \quad E(N(t)) = 8t \quad \text{Var}(N(t)) = 8t$$

$$1. E(N(8)) = 8 \cdot 8 = 64 \quad \text{Var}(N(8)) = 64$$

$$2. P(N(\frac{1}{4}) = 0) = e^{-8 \cdot \frac{1}{4}} \frac{(8 \cdot \frac{1}{4})^0}{0!} = e^{-2}$$

$$3. \text{Cov}(N(11) - N(9), N(11) - N(10)) = \text{Cov}(N(11) - N(10) + N(10) - N(9), N(11) - N(10))$$

$$= \text{Cov}(N(11) - N(10), N(11) - N(10)) + \text{Cov}(N(10) - N(9), N(11) - N(10)) =$$

$$= \text{Var}(N(11) - N(10)) + 0 \stackrel{\text{IID}}{=} \text{Var}(N(1)) = 8 \cdot 1 = 8$$

$$4. \text{Cov}(N(11) - N(9), N(24+11) - N(24+10)) = 0$$

$$4. \text{Cov}(N(2) - N(0), N(24+2) - N(24+1)) = 0$$

1. Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ . Να υπολογιστεί η μέση τιμή

Φυλλάδιο Βασικών
ασκήσεων Οικονομικών

H|W

$$E[N(t)(N(t)-1)(N(t)-2)\cdots(N(t)-k+1)] = \text{Ζητούμενο} = (\lambda t)^k$$

1ος Τρόπος : ανανεωτικός συλλογισμός

2ος τρόπος : $P_{N(t)}(z) = e^{-\lambda t(1-z)}$

$$\text{Ζητούμενο} = P_{N(t)}^{(k)}(1)$$

3ος Τρόπος : $\text{Ζητούμενο} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{(n-k)!} = (\lambda t)^k \cdot \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-k}}{(n-k)!} \quad n-k=u$$

$$= (\lambda t)^k \cdot \sum_{u=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^u}{u!} = (\lambda t)^k \cdot 1 = (\lambda t)^k$$

3. Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ . Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(N(t) \text{ είναι περιττός}), t \geq 0$.

Φυλλαδιο Βασικών
Λογίσεων Οικισμού

1 $N(t) \bmod 2$.



2 πιθανογεννήτρια

$$P_{N(t)}^{(1)}$$

$$P_{N(t)}(1) = 1.$$

↙ $P_{N(t)}(1) - P_{N(t)}(-1) = 2 \cdot P(N(t) \text{ περιττός})$

3. αναλυτικά: $P(N(t) \text{ περιττός}) + P(N(t) \text{ άρτιος}) = 1$.

$$P(N(t) \text{ περιττός}) - P(N(t) \text{ άρτιος}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{2k+1}}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!} =$$

$$= e^{-\lambda t} \left[\left(\frac{(\lambda t)^1}{1!} + \frac{(\lambda t)^3}{3!} + \frac{(\lambda t)^5}{5!} + \dots \right) - \left(1 + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \frac{(\lambda t)^4}{4!} + \dots \right) \right]$$

$$= e^{-\lambda t} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda t} \quad \left(e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ σειρά Taylor} \right)$$

$$= e^{-2\lambda t}$$

Άσκηση 1.13 Έστω $\{N(t)\}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και $S_1, S_2, \dots$ οι χρόνοι των γεγονότων της. Να υπολογιστεί ο μέσος χρόνος του τελευταίου γεγονότος πριν τη στιγμή t , δηλαδή η $E[S_{N(t)}]$.

Ευδιαμέσοι
χρόνοι

$\exp(\lambda)$

Βλ ΜΟ
(να λυθεί με
αυαυεωτικό σπλην).