

Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα Ι

Τελική εξέταση 12ης Σεπτεμβρίου 2012 - Ακαδημαϊκό έτος 2011–2012

Θέμα 1ο: (3 βαθμοί) Στη διάρκεια μιας εφημερίας ενός νοσοκομείου τα χειρουργικά περιστατικά καταφθάνουν σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 20 περιστατικά την ώρα. Κάθε περιστατικό χρειάζεται ακτινογραφία με πιθανότητα 0.75, ανεξάρτητα από τα άλλα περιστατικά. Να υπολογιστούν:

- (1) Η πιθανότητα να χρειαστεί πρώτη φορά ακτινογραφία στο τέταρτο περιστατικό που καταφθάνει στην εφημερία.
- (2) Η δεσμευμένη πιθανότητα στην πρώτη μισή ώρα της εφημερίας να χρειάστηκαν ακτινογραφία 5 περιστατικά, δεδομένου ότι στην πρώτη ώρα της εφημερίας εμφανίστηκαν συνολικά 15 περιστατικά.
- (3) Ο δεσμευμένος μέσος χρόνος εμφάνισης του πρώτου περιστατικού στην εφημερία δεδομένου ότι μέσα στα πρώτα 15 λεπτά της εφημερίας εμφανίστηκαν 2 περιστατικά.

Θέμα 2ο: (3 βαθμοί) Μια μηχανή επιθεωρείται στους χρόνους S_1, S_2, \dots των γεγονότων μιας ανανεωτικής διαδικασίας $\{N(t)\}$ με κατανομή ενδιάμεσων χρόνων (σε λεπτά) $G(t)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$g(t) = \frac{4}{25}e^{-\frac{t}{5}} + \frac{1}{50}e^{-\frac{t}{10}}, \quad t \geq 0.$$

Κάθε επιθεώρηση κοστίζει 5 ευρώ. Κατά τη διάρκεια της λειτουργίας της η μηχανή καταναλώνει ρεύμα με κόστος 0.05 ευρώ το λεπτό. Επιπλέον υφίσταται ηλεκτρικές διαταραχές σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 60 ηλεκτρικές διαταραχές την ώρα. Κάθε ηλεκτρική διαταραχή επιφέρει κόστος 0.25 ευρώ.

- (1) Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο μέσο κόστος της λειτουργίας της μηχανής ανά λεπτό (λάβετε υπόψη το κόστος των επιθεωρήσεων, του ρεύματος και των ηλεκτρικών διαταραχών).
- (2) Να υπολογιστεί η ανανεωτική συνάρτηση $M(t) = E[N(t)]$.

Θέμα 3ο: (4 βαθμοί) Έστω X_1, X_2, X_3, \dots ανεξάρτητες και ισόνομες μη-αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με συνεχή κατανομή $G(x)$ και $E[X_1^k] = \mu_k < \infty$, $k \geq 1$. Έστω $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n = 1, 2, \dots$ ($S_0 = 0$) η αντίστοιχη ανανεωτική ακολουθία, $N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$, $t \geq 0$ η ανανεωτική διαδικασία και $M(t) = E[N(t)]$, $t \geq 0$ η ανανεωτική συνάρτηση.

- (1) Έστω $R(t) = E[N(t)^2]$. Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $R(t)$ και να δειχθεί ότι

$$R(t) = M(t) + 2 \int_0^t M(t-x) dM(x).$$

- (2) Έστω $A(t) = t - S_{N(t)}$ ο παρελθών ή αναδρομικός χρόνος ανανέωσης (ηλικία της ανανεωτικής διαδικασίας) τη στιγμή t και $C(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$ είναι ο t -εξαρτώμενος χρόνος (δηλαδή $C(t)$ είναι ο ενδιάμεσος χρόνος ανανέωσης που περιέχει τη στιγμή t ή ισοδύναμα ο χρόνος από το προηγούμενο γεγονός έως το επόμενο γεγονός τη στιγμή t). Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E \left[\int_0^t A(u)C(u) du \right]}{t}$$

(το όριο να δοθεί ως έκφραση κάποιων ροπών από τις μ_1, μ_2, \dots).

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 30 λεπτά. Καλή επιτυχία!