

Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα Ι

Επαναληπτική εξέταση - Ακαδημ. έτος 2012-2013

Θέμα 1ο: (4 βαθμοί) Σε ένα τηλεφωνικό κέντρο αεροπορικής εταιρείας με δυνατότητα εξυπηρέτησης στα Αγγλικά, στα Γαλλικά και στα Ελληνικά καταφθάνουν κλήσεις πελατών, σύμφωνα με διαδικασία Poisson με ρυθμό 60 κλήσεις την ώρα. Κάθε πελάτης ζητά να εξυπηρετηθεί στα Αγγλικά με πιθανότητα 0.3, στα Γαλλικά με πιθανότητα 0.2 και στα Ελληνικά με πιθανότητα 0.5, ανεξάρτητα από τους άλλους πελάτες. Να υπολογιστούν τα ακόλουθα:

- (1) Η συνδιακύμανση του συνολικού αριθμού κλήσεων που φθάνουν σε μια ώρα και του αριθμού των κλήσεων για εξυπηρέτηση στα Ελληνικά που φθάνουν στην ίδια ώρα.
- (2) Η δεσμευμένη πιθανότητα σε μια ώρα να φθάσουν 10 κλήσεις για εξυπηρέτηση στα Αγγλικά και 15 κλήσεις για εξυπηρέτηση στα Γαλλικά, δεδομένου ότι έφθασαν σε αυτήν την ίδια ώρα συνολικά 65 κλήσεις.
- (3) Η πιθανότητα η πρώτη κλήση για εξυπηρέτηση στα Αγγλικά να φθάσει αργότερα από την τρίτη κλήση για εξυπηρέτηση στα Ελληνικά.
- (4) Ο δεσμευμένος μέσος χρόνος εμφάνισης της εικοστής κλήσης για εξυπηρέτηση στα Ελληνικά, δεδομένου ότι την πρώτη ώρα λειτουργίας του τηλεφωνικού κέντρου έφθασαν δεκαπέντε κλήσεις για εξυπηρέτηση στα Ελληνικά.

Θέμα 2ο: (4 βαθμοί) Έστω X_1, X_2, X_3, \dots ανεξάρτητες και ισόνομες μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με συνεχή κατανομή $G(x)$ και $E[X_1^k] = \mu_k < \infty$, $k \geq 1$. Έστω $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n = 1, 2, \dots$ ($S_0 = 0$) η αντίστοιχη ανανεωτική ακολουθία και $N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$, $t \geq 0$ η αντίστοιχη ανανεωτική διαδικασία. Ορίζουμε επίσης για κάθε $t \geq 0$ και $k \geq 1$ $M_k(t) = E[N(t)(N(t) - 1)(N(t) - 2) \cdots (N(t) - k + 1)]$.

- (1) Να γράψετε μια ανανεωτική εξίσωση για την $H(t) = E[S_{N(t)+2}]$ και να τη λύσετε, βρίσκοντας την $H(t)$ συναρτήσει κάποιων από τα μ_k και κάποιων από τα $M_k(t)$.
- (2) Να αποδείξετε ότι

$$M_k(t) = k \int_0^t M_{k-1}(t-x)dG(x) + \int_0^t M_k(t-x)dG(x), \quad k \geq 1.$$

και να βρείτε το μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes $\tilde{M}_k(s)$ της $M_k(t)$ συναρτήσει του μετασχηματισμού $\tilde{G}(s)$ της $G(t)$.

Θέμα 3ο: (3 βαθμοί) Έστω X_1, X_2, X_3, \dots ανεξάρτητες και ισόνομες μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με συνεχή κατανομή $G(x)$ και $E[X_1^k] = \mu_k < \infty$, $k \geq 1$. Έστω $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n = 1, 2, \dots$ ($S_0 = 0$) η αντίστοιχη ανανεωτική ακολουθία και $N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$, $t \geq 0$ η αντίστοιχη ανανεωτική διαδικασία.

- (1) Έστω $X(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$ ο t -εξαρτώμενος ενδιάμεσος χρόνος τη στιγμή t (δηλαδή ο χρόνος από το αμέσως προηγούμενο γεγονός πριν από τη στιγμή t έως το αμέσως επόμενο γεγονός μετά τη χρονική στιγμή t). Να γραφεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $E[X(t)]$ και να υπολογιστεί το $\lim_{t \rightarrow \infty} E[X(t)]$.
- (2) Θεωρούμε μια νέα στοχαστική διαδικασία $\{N'(t)\}$ η οποία δημιουργείται ως εξής: Κάθε γεγονός της αρχικής διαδικασίας $\{N(t)\}$ καταγράφεται με πιθανότητα p ή αγνοείται με πιθανότητα $1 - p$, ανεξάρτητα από τα άλλα γεγονότα, και $N'(t)$ είναι ο αριθμός των καταγεγραμμένων γεγονότων μέχρι τη στιγμή t . Είναι η $\{N'(t)\}$ ανανεωτική διαδικασία; Αν $M'(t) = E[N'(t)]$ να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes $\tilde{M}'(s)$ της $M'(t)$ συναρτήσει του μετασχηματισμού $\tilde{G}(s)$ της $G(t)$ και της πιθανότητας p .

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 30 λεπτά. Καλή επιτυχία!