Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα Ι
Τελική εξέταση, 12 Ιουνίου 2018

Θέμα 1ο: Θεωρούμε δυο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson $\{N_1(t)\}$ και $\{N_2(t)\}$ με ρυθμούς λ και μ αντίστοιχα. Έστω $\{N(t)\}$ η υπέρθεσή τους.

(1) (0.5 β.) Να υπολογιστεί η πιθανότητα το 1ο γεγονός της $\{N_1(t)\}$ να είναι το n-οστό γεγονός της $\{N(t)\}$.
(2) (0.5 β.) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $\Pr[N_1(t) = 1 | N(t) = n]$.
(3) (0.5 β.) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $\Pr[N(t) = n | N_2(t/2) = n - 1]$.
(4) (0.5 β.) Βρείτε ποιά κατανομή ακολουθεί η $N(t) - N_2(t/2)$.
(5) (0.5 β.) Να υπολογιστεί η συνδιακύμανση $Cov(N_1(t), N(t))$.

Θέμα 2ο: Θεωρούμε μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t)\}$ με ενδιάμεσους χρόνους γεγονότων $X_1, X_2, \ldots$ με κατανομή $F_X(x)$ και χρόνους γεγονότων $S_1, S_2, \ldots$. Δοθείσης μιας χρονικής στιγμής t, $S_{N(t)}$ και $S_{N(t)+1}$ είναι οι χρόνοι του τελευταίου γεγονότος πριν τη στιγμή t (με $S_{N(t)} = 0$ αν $N(t) = 0$) και του πρώτου χρόνου γεγονότος μετά τη χρονική στιγμή t, αντίστοιχα. Έστω

$$h(t) = E\left[\frac{S_{N(t)} + S_{N(t)+1}}{2}\right].$$

(1) (1.0 β.) Να διατυπωθεί μια ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$.
(2) (1.5 β.) Να βρεθεί η $h(t)$ σε κλειστή μορφή, όταν η $\{N(t)\}$ είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό λ.

Θέμα 3ο: Θεωρούμε μια μηχανή επεξεργασίας προϊόντων που λειτουργεί με τον εξής τρόπο: Στην αρχή κάθε κύκλου λειτουργίας της φθάνει μια παρτίδα προϊόντων προς επεξεργασία, η οποία περιέχει 2, 3 ή 4 προϊόντα με πιθανότητες 1/2, 1/3 και 1/6 αντίστοιχα. Κατόπιν τα προϊόντα αυτά επεξεργάζονται από τη μηχανή ένα-ένα. Οι διαδοχικοί χρόνοι επεξεργασίας των προϊόντων είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 2 χρονικές μονάδες. Κάθε προϊόν που διεκπεραιώνεται αναχωρεί άμεσα από το σύστημα. Μόλις ολοκληρωθεί η επεξεργασία όλων των προϊόντων μιας παρτίδας ο αντίστοιχος κύκλος λειτουργίας τελειώνει και αρχίζει ένας νέος με την άφιξη μιας νέας παρτίδας προϊόντων κ.ο.κ. Το σύστημα έχει κέρδος 10 χρηματικών μονάδων για κάθε προϊόν, ενώ σωρρεύει κόστος αποθήκευσης 1 χρηματικής μονάδας ανά προϊόν και χρονική μονάδα.

(1) (0.5 β.) Να υπολογιστεί η μέση διάρκεια ενός κύκλου λειτουργίας του συστήματος.
(2) (1.5 β.) Να υπολογιστεί ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κέρδους του συστήματος.
(3) (0.5 β.) Αν μετά τη διεκπεραίωση όλων των προϊόντων μιας παρτίδας και πριν την αρχή του επόμενου κύκλου λειτουργίας, το σύστημα χρειάζεται ρύθμιση με πιθανότητα 1/3 και κάθε περίοδος ρύθμισης διαρκεί 3 χρονικές μονάδες, να υπολογιστούν η μέση διάρκεια ενός κύκλου λειτουργίας και ο μακροπρόθεσμος μέσος ρυθμός κέρδους του συστήματος. Υποθέστε ότι κάθε ρύθμιση κοστίζει 6 χρηματικές μονάδες και κατά τη διάρκειά της το σύστημα παραμένει κενό, οπότε δεν σωρεύει κόστος αποθήκευσης.

Θέμα 4ο: Θεωρούμε την $M/M/1$ ουρά, με Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ, εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ, 1 υπηρέτη, άπειρη χωρητικότητα και πειθαρχία ουράς FCFS. Θεωρούμε ότι κάθε πελάτης που φθάνει στο σύστημα εισέρχεται σε αυτό με πιθανότητα q.

(1) (1 β.) Να βρεθεί η οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα (p_n), σε συνεχή χρόνο.
(2) (1 β.) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός αφικνούμενου πελάτη στο σύστημα (λογίζοντας 0 το χρόνο παραμονής των πελατών που αναχωρούν αμέσως) καθώς και ο μέσος χρόνος παραμονής ενός εισερχόμενου πελάτη στο σύστημα.
(3) (0.5 β.) Να βρεθεί το μέσο πλήθος πελατών που φθάνουν στο σύστημα και αναχωρούν άμεσα μεταξύ δυο διαδοχικών εισόδων πελατών στο σύστημα.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες και 30 λεπτά. Καλή επιτυχία!