

Επιχειρησιακή Έρευνα: Στοχαστικά Μοντέλα - Ιούνιος 2022

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: _____ Α.Μ: _____

ΟΔΗΓΙΕΣ

- (1) Απαντήστε σε όλα τα θέματα. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.
- (2) Οι απαντήσεις να είναι αιτιολογημένες. Απαντήσεις χωρίς να φαίνεται η απαιτούμενη εργασία είναι σα να μην έχουν δοθεί.
- (3) Γράψτε αμέσως τα στοιχεία σας στο γραπτό σας και στα θέματα. Γραπτό χωρίς στοιχεία στη διάρκεια της εξέτασης μηδενίζεται. Στο τέλος του διαγωνίσματος παραδίδονται ΟΛΕΣ οι κόλλες, περιλαμβανομένου και του πρόχειρου.
- (4) Επιτρέπεται η χρήση calculator αλλά ΟΧΙ κινητού τηλεφώνου. Κινητό τηλέφωνο που εντοπίζεται να χρησιμοποιείται ή να βρίσκεται πάνω στο έδρανο συνεπάγεται μηδενισμό του γραπτού, ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ απο τον σκοπό για τον οποίο χρησιμοποιείται (π.χ. για ρολόι).
- (5) Διάρκεια διαγωνίσματος : 2 ώρες. Πρώτη αποχώρηση : 1 ώρα. **Καλή Επιτυχία!**

ΘΕΜΑ 1. Σε ένα τηλεφωνικό κέντρο μιας τράπεζας φτάνουν κλήσεις σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 50 ανά ώρα. Μια κλήση είναι για θέματα τεχνικής υποστήριξης και ebanking με πιθανότητα 40%, για εργασίες τραπεζικού τύπου με πιθανότητα 50% και για φορολογικά θέματα με πιθανότητα 10%. Να υπολογιστούν:

- (α) Η πιθανότητα την πρώτη ώρα να ήρθαν 25 τεχνικές κλήσεις, αν είναι γνωστό ότι στις δύο πρώτες ώρες ήρθαν 40 τεχνικές κλήσεις.
- (β) Ο μέσος χρόνος άφιξης της κάθε κλήσης, αν είναι γνωστό ότι στα πρώτα 20 λεπτά ήρθαν 1 φορολογική και 2 τεχνικές κλήσεις.
- (γ) Ο ελάχιστος αριθμός υπαλλήλων κάθε ειδικότητας που απαιτούνται έτσι ώστε το σύστημα να είναι ευσταδές, αν είναι γνωστό ότι κάθε τεχνική κλήση απαιτεί κατά μέσο όρο 5 λεπτά εξυπηρέτησης, κάθε τραπεζική κλήση κατά μέσο όρο 4 λεπτά και κάθε φορολογική κλήση κατά μέσο όρο 4 λεπτά.

(Σημείωση) Κάθε υπάλληλος εξυπηρετεί μόνο κλήσεις της ειδικότητάς του. Δεν απαιτείται να γίνουν αριθμητικοί υπολογισμοί στις τελικές εκφράσεις.

(Υπόδειξη) Για μια τυχαία μεταβλητή $X \geq 0$ ισχύει $E(X) = \int_0^{\infty} P(X > t) dt$.

ΘΕΜΑ 2.

(Μέρος Α) Έστω μη αρνητική ακέραια τυχαία μεταβλητή N με συνάρτηση πιθανότητας $p_N(k) = P(N = k)$, $k = 0, 1, \dots$, μέση τιμή μ_N και διασπορά σ_N^2 , και X_1, X_2, \dots ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, ανεξάρτητες της N , με συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$, μέση τιμή μ_X και διασπορά σ_X^2 . Έστω $S = \sum_{i=1}^N X_i$.

Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διασπορά της S συναρτήσει των μέσων τιμών και διασπορών των X και N .

(Μέρος Β) Ο αριθμός παραγγελιών που γίνονται σε ένα ηλεκτρονικό κατάστημα πωλήσεων στη διάρκεια μιας μέρας ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση τιμή λ . Οι αξίες X_1, X_2, \dots των παραγγελιών είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές ανεξάρτητες του N . Συγκεκριμένα, μια παραγγελία είναι με πιθανότητα p_1 μηδενικής αξίας λόγω έλλειψης προϊόντων, με πιθανότητα p_2 είναι για ένα συγκεκριμένο δημοφιλές προϊόν του οποίου η τιμή πώλησης είναι ίση με r , ενώ με πιθανότητα p_3 είναι για άλλα προϊόντα του καταστήματος και η αξία της είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο μ και μέση τιμή $r_1 = 1/\mu$, όπου $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

(B1) Να βρεθεί η αδροιστική συνάρτηση κατανομής, η μέση τιμή και η διασπορά της αξίας X μιας τυχαίας παραγγελίας.

(B2) Έστω R η συνολική αξία των ημερήσιων παραγγελιών που λαμβάνει το κατάστημα. Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της R .

Συνέχεια πίσω

ΘΕΜΑ 3. (α) Έστω X τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κατανομή Erlang(n, λ). Να αποδειχθεί ότι

$$E(X^k) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} \frac{1}{\lambda^k}.$$

(β) Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ με ενδιάμεσους χρόνους X_1, X_2, \dots που ακολουθούν κατανομή Erlang(n, λ) και χρόνους γεγονότων $S_n, n = 0, 1, \dots, S_0 = 0$. Έστω επίσης

$$h(t) = E[(S_{N(t)+1} - S_{N(t)})^2].$$

Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \frac{(n+1)(n+2)}{\lambda^2}.$$

(Υπόδειξη) Διατυπώστε μια ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$ και εφαρμόστε το βασικό ανανεωτικό θεώρημα.

ΘΕΜΑ 4. Ένα μηχάνημα έχει χρόνο λειτουργίας που ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο μ . Ένας τεχνικός κάνει διαδοχικές επιθεωρήσεις στο μηχάνημα και το αντικαθιστά αν είναι χαλασμένο. Οι επισκέψεις του τεχνικού γίνονται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και η διαδικασία επιθεώρησης/αντικατάστασης είναι στιγμιαία. Το κόστος κάθε επίσκεψης του τεχνικού είναι ίσο με K (ανεξάρτητα αν γίνει ή όχι αντικατάσταση στο μηχάνημα). Αν το μηχάνημα χαλάσει πριν την επόμενη επιθεώρηση, τότε παραμένει εκτός λειτουργίας μέχρι να έρθει ο τεχνικός. Υπάρχει κόστος h ανά μονάδα χρόνου που το μηχάνημα βρίσκεται εκτός λειτουργίας, όπου $h > K\mu$.

(α) Να υπολογιστεί το αναμενόμενο μέσο κόστος ανά μονάδα χρόνου.

(β) Να υπολογιστεί ο βέλτιστος ρυθμός επιθεωρήσεων λ που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος του ερωτήματος (α).