

Επιχειρησιακή Έρευνα: Στοχαστικά Μοντέλα - Σεπτέμβριος 2022

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: _____ Α.Μ: _____

ΟΔΗΓΙΕΣ

- (1) Απαντήστε σε όλα τα θέματα. Τα θέματα είναι ισοδύναμα.
- (2) Οι απαντήσεις να είναι αιτιολογημένες. Απαντήσεις χωρίς να φαίνεται η απαιτούμενη εργασία είναι σαν να μην έχουν δοθεί.
- (3) Γράψτε αμέσως τα στοιχεία σας στο γραπτό σας και στα θέματα. Γραπτό χωρίς στοιχεία στη διάρκεια της εξέτασης μηδενίζεται. Στο τέλος του διαγωνίσματος παραδίδονται ΟΛΕΣ οι κόλλες, περιλαμβανομένου και του πρόχειρου.
- (4) Επιτρέπεται η χρήση calculator αλλά ΟΧΙ κινητού τηλεφώνου. Κινητό τηλέφωνο που εντοπίζεται να χρησιμοποιείται ή να βρίσκεται πάνω στο έδρανο συνεπάγεται μηδενισμό του γραπτού, ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ απο τον σκοπό για τον οποίο χρησιμοποιείται (π.χ. για ρολόι).
- (5) Διάρκεια διαγωνίσματος : 2 ώρες. Πρώτη αποχώρηση : 45 λεπτά. **Καλή Επιτυχία!**

ΘΕΜΑ 1.

Από ένα σημείο του οδικού δικτύου περνούν αυτοκίνητα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson $\{N_1(t), t \geq 0\}$ με ρυθμό λ_1 και δίκυκλα σύμφωνα με μια ανεξάρτητη της πρώτης διαδικασία Poisson $\{N_2(t), t \geq 0\}$ με ρυθμό λ_2 . Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ η διαδικασία αφίξεων οχημάτων και των δύο κατηγοριών, με $N(t) = N_1(t) + N_2(t), t \geq 0$.

- (α) Να υπολογίσετε τον αναμενόμενο χρόνο μέχρι να περάσουν n οχήματα.
- (β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα τα τρία πρώτα οχήματα που θα περάσουν από το σημείο να είναι 1 αυτοκίνητο και 2 δίκυκλα, με αυτή τη σειρά.
- (γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα στα 5 πρώτα οχήματα που θα περάσουν από το σημείο, τα 2 να είναι αυτοκίνητα.
- (δ) Να υπολογίσετε τη δεσμευμένη μέση τιμή $E[N_1(t) | N(t/2) = k]$.

ΘΕΜΑ 2. Έστω μια ανανεωτική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ με ενδιάμεσους χρόνους X_1, X_2, \dots που ακολουθούν συνεχή κατανομή με αδρυστική συνάρτηση πιθανότητας $F_X(t)$, συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(t)$ και ροπές $E[X^k] = \mu_k < \infty, k = 1, 2, \dots$. Έστω $S_n = X_1 + \dots + X_n, n = 1, 2, \dots$ οι στιγμές γεγονότων με $S_0 = 0$. Θετούμε $B(t) = S_{N(t)+1} - t$ τον υπολειπόμενο χρόνο έως το επόμενο γεγονός από τη στιγμή t και έστω $h(t) = E[B(t)^2]$ η δεύτερη ροπή της $B(t)$.

- (α) Να διατυπώσετε μια ανανεωτική εξίσωση για την $h(t)$.
- (β) Να υπολογίσετε το όριο $a = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$.
- (γ) Αν η $\{N(t)\}$ είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό λ , δείξτε ότι $h(t) = a$ για κάθε $t \geq 0$.

ΘΕΜΑ 3. Έξω από την αίθουσα αφίξεων ενός αεροδρομίου βρίσκεται μια στάση λεωφορείου που μεταφέρει επιβάτες σε έναν απομακρυσμένο χώρο στάθμευσης αυτοκινήτων. Επιβάτες φτάνουν στη στάση σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ . Το λεωφορείο έχει άπειρη χωρητικότητα και όταν περάσει από τη στάση παίρνει όλους τους επιβάτες που περιμένουν. Το λεωφορείο πηγαίνει τους επιβάτες στο parking και επιστρέφει για να πάρει τους επόμενους (αν δεν υπάρχει επιβάτης να περιμένει φεύγει άδειο). Ο χρόνος επιβίβασης και αποβίβασης των επιβατών είναι αμελητέος. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται συνεχώς. Ο χρόνος διαδρομής του λεωφορείου από τη στάση στο parking ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο μ . Ο χρόνος της διαδρομής από το parking πίσω στη στάση είναι ανεξάρτητος του προηγούμενου και ακολουθεί επίσης εκθετική κατανομή με ρυθμό μ .

- (α) Υπολογίστε την πιθανότητα όταν φτάσει το λεωφορείο στη στάση να περιμένουν n επιβάτες, για $n \geq 0$.
- (β) Υπολογίστε τον αναμενόμενο αριθμό επιβατών που περιμένουν στη στάση όταν φτάσει το λεωφορείο.
- (γ) Αν κάθε επιβάτης πληρώνει εισιτήριο r ενώ το κόστος λειτουργίας του λεωφορείου είναι ίσο με c ανά μονάδα χρόνου για όσο διάστημα κινείται, να υπολογίσετε το αναμενόμενο μέσο καθαρό κέρδος ανά μονάδα χρόνου σε άπειρο ορίζοντα.