Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα Ι
Τελική εξέταση 4ης Ιουλίου 2012 - Ακαδημαϊκό έτος 2011–2012

Θέμα 1ο: Θεωρούμε δυο ανεξάρτητες στοχαστικές διαδικασίες Poisson, $\{N_1(t)\}$ και $\{N_2(t)\}$ με ρυθμούς λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Έστω επίσης $\{N(t)\}$ η υπέρθεσή τους. Συμβολίζουμε, τέλος, με $S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, S_3^{(1)}, \ldots$ τους χρόνους των γεγονότων της $\{N_1(t)\}$, με $S_1^{(2)}, S_2^{(2)}, S_3^{(2)}, \ldots$ τους χρόνους των γεγονότων της $\{N_2(t)\}$ και με $S_1, S_2, S_3, \ldots$ τους χρόνους των γεγονότων της $\{N(t)\}$. Έστω $t > 0$. Να υπολογιστούν τα παρακάτω:

(1) $P(N_1(\frac{t}{2}) = k, N_2(\frac{t}{2}) = n - k | N(t) = n + 1)$, $0 \leq k \leq n$,

(2) $Var[N_1(t) - N_2(\frac{t}{2})]$,

(3) $P(S_1^{(1)} < S_2^{(2)})$,

(4) $E[N(\frac{t}{2}) | S_1 \leq t]$.

Θέμα 2ο: Επιβάτες φθάνουν στην πλατφόρμα ενός σταθμού του μετρό σύμφωνα με μια στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Οι συρμοί του μετρό φθάνουν συμφωνα με μια στοχαστική διαδικασία Poisson με ρυθμό μ, που είναι ανεξάρτητη από τη στοχαστική διαδικασία αφίξεων των επιβατών. Τη χρονική στιγμή 0 ο σταθμός είναι άδειος. Επιπλέον, ο σταθμός αδειάζει κάθε φορά που φθάνει ένας συρμός αφού όλοι οι πελάτες που βρίσκονται παρόντες στην πλατφόρμα επιβιβάζονται ακαριαία στο συρμό και ο συρμός αναχωρεί άμεσα. Να υπολογιστούν

(1) Το μέσο πλήθος επιβατών που επιβιβάζονται σε κάθε επίσκεψη συρμού (συναρτήσει του λ και του μ).

(2) Την πιθανότητα να μην επιβιβαστεί κανένας επιβάτης σε ένα συρμό (συναρτήσει του λ και του μ).

(3) Το μέσο πλήθος πελατών που έχουν αναχωρήσει από το σταθμό μέχρι τη στιγμή t (συναρτήσει του λ, του μ και του t).

Θέμα 3ο: Έστω $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες μη-αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με συνεχή κατανομή $G(x)$ και $E[X_1^k] = \mu_k < \infty$, $k \geq 1$. Έστω $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n = 1, 2, \ldots$ $(S_0 = 0)$ η αντίστοιχη ανανεωτική ακολουθία και $N(t) = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$, $t \geq 0$ η ανανεωτική διαδικασία.

(1) Έστω $A(t) = t - S_{N(t)}$ ο παρελθών ή αναδρομικός χρόνος ανανέωσης (ηλικία της ανανεωτικής διαδικασίας) τη στιγμή t. Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{t \to \infty} \frac{E\left[\int_0^t A(u)^2 du\right]}{t}.$$

(2) Διατυπώστε μια ανανεωτική εξίσωση για την $H(t) = E[C(t)^3]$, όπου $C(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$ είναι ο t-εξαρτώμενος χρόνος (δηλαδή $C(t)$ είναι ο ενδιάμεσος χρόνος ανανέωσης που περιέχει τη στιγμή t ή ισοδύναμα ο χρόνος από το προηγούμενο γεγονός έως το επόμενο γεγονός τη στιγμή t). Βρείτε το $\lim_{t \to \infty} E[C(t)^3]$ (το όριο να δοθεί ως έκφραση κάποιων ροπών από τις $\mu_1, \mu_2, \ldots$).

Στοχαστικές Μέθοδοι στην Επιχειρησιακή Έρευνα Ι
Τελική Εξέταση 4ης Ιουλίου 2012
Λύσεις των Θεμάτων

Θέμα 1ο:

(1) $P(N_1(\frac{t}{2})=k, N_2(\frac{t}{2})=n-k \mid N(t)=n+1)$

$$= \frac{P(N_1(\frac{t}{2})=k, N_2(\frac{t}{2})=n-k, N(t)=n+1)}{P(N(t)=n+1)} \quad \text{(από τον ορισμό της δέσμευσης)}$$

$$= \frac{P(N_1(\frac{t}{2})=k, N_2(\frac{t}{2})=n-k, N(t)-N(\frac{t}{2})=1)}{P(N(t)=n+1)}$$

$$= \frac{P(N_1(\frac{t}{2})=k)P(N_2(\frac{t}{2})=n-k)P(N(t)-N(\frac{t}{2})=1)}{P(N(t)=n+1)} \quad \text{(ανεξαρτ. } \{N_1(t)\}, \{N_2(t)\} \text{, ανεξ. προσαυξ.)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda_1 t/2}\frac{(\lambda_1 t/2)^k}{k!} e^{-\lambda_2 t/2}\frac{(\lambda_2 t/2)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\frac{t}{2}} \cdot \frac{[(\lambda_1+\lambda_2)t/2]^1}{1!}}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}[(\lambda_1+\lambda_2)t]^{n+1}/(n+1)!} \quad \text{(ομογ. προσ. } \{N(t)\} \text{ Poisson)}$$

$$= \frac{(n+1)!\,\lambda_1^k\,\lambda_2^{n-k}}{k!\,(n-k)!\,2^{n+1}(\lambda_1+\lambda_2)^n}.$$

(2) $N_1(t)$ και $N_2(\frac{t}{2})$ είναι ανεξάρτητες, άρα

$$Var[N_1(t)-N_2(\tfrac{t}{2})] = Var[N_1(t)] + Var[N_2(\tfrac{t}{2})]$$

$$= \lambda_1 t + \lambda_2 t/2$$

αφού για τυχαίες μεταβλητές $X \sim Poisson(\lambda)$ ισχύει $E[X] = Var[X] = \lambda$.

(3) Οι $S_1^{(1)}$ και $S_2^{(2)}$ είναι ανεξάρτητες με κατανομές $Exp(\lambda_1)$ και $Gamma(2,\lambda_2)$ αντίστοιχα.
Άρα

$$P(S_1^{(1)} < S_2^{(2)}) = \int_0^\infty P(S_1^{(1)} < t) f_{S_2^{(2)}}(t)dt$$

$$= \int_0^\infty (1-e^{-\lambda_1 t})\frac{\lambda_2^2}{(2-1)!}t^{2-1}e^{-\lambda_2 t}dt$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty \frac{\lambda_2^2}{(2-1)!}t^{2-1}e^{-\lambda_2 t}dt}_{=1} - \lambda_2^2\underbrace{\int_0^\infty t e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}dt}_{\frac{1}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}} = 1-\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^2$$

(4) $E[N(\frac{t}{2}) \mid S_1 \le t] = E[N(\frac{t}{2}) \mid N(t) \ge 1]$ $\left(\begin{array}{c}\text{Ισοδυναμία} \\ \{S_n \le t\} = \{N(t) \ge n\}\end{array}\right)$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k \, P(N(\tfrac{t}{2}) = k \mid N(t) \ge 1) \quad (\text{Ορισμός})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{P(N(\frac{t}{2}) = k, N(t) \ge 1)}{P(N(t) \ge 1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{P(N(\frac{t}{2}) = k, N(t) - N(\frac{t}{2}) \ge 1-k)}{P(N(t) \ge 1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{P(N(\frac{t}{2}) = k) \, P(N(t) - N(\frac{t}{2}) \ge 1-k)}{P(N(t) \ge 1)} \quad \left(\begin{array}{c}\text{Ανεξ.} \\ \text{προσαυξ.}\end{array}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{P(N(\frac{t}{2}) = k) \, P(N(\frac{t}{2}) \ge 1-k)}{P(N(t) \ge 1)} \quad \left(\begin{array}{c}\text{Ομογ.} \\ \text{προσαυξ.}\end{array}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{P(N(\frac{t}{2}) = k) \, P(N(\frac{t}{2}) \ge 1-k)}{P(N(t) \ge 1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{P(N(\frac{t}{2}) = k)}{P(N(t) \ge 1)} \quad \left(\begin{array}{c}P(N(\frac{t}{2}) \ge 1-k) = 1 \\ \text{για } k \ge 1\end{array}\right)$$

$$= \frac{E[N(\frac{t}{2})]}{P(N(t) \ge 1)}$$

$$= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)\frac{t}{2}}{1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}.$$

<u>Θέμα 2ο:</u>

Έστω $\{\Lambda(t)\}$ η διαδικασία αφίξεων των πιθανών και $\{M(t)\}$ η διαδικασία αφίξεων των ευρημών με χρόνους αφίξεων ευρημών $S_1, S_2, \ldots$

(1) $$E[\Lambda(S_1)] = \int_0^{\infty} E[\Lambda(t)] f_{S_1}(t)\,dt$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda t \, \mu e^{-\mu t} dt$$

$$= \lambda \underbrace{\int_0^{\infty} t \, \mu e^{-\mu t} dt}_{\text{Μέση τιμή } Exp(\mu)} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

(2) $$P(\Lambda(S_1)=0) = \int_0^\infty P(\Lambda(t)=0)\, f_{S_1}(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mu e^{-\mu t}\,dt$$

$$= \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

(3) $$E\Big[\sum_{i=1}^{M(t)} \underbrace{\big(\Lambda(S_i)-\Lambda(S_{i-1})\big)}_{\substack{\text{Πλήθος επιβατών} \\ \text{που αναχώρησαν με} \\ \text{το συρμό } i}}\Big] = E\big[\Lambda(S_{M(t)})\big]$$

$$= E\big[E[\Lambda(S_{M(t)}) \mid S_{M(t)}]\big].$$

Όμως

$$E[\Lambda(S_{M(t)}) \mid S_{M(t)}=x] = E[\Lambda(x)] = \lambda x$$

οπότε

$$E[\Lambda(S_{M(t)}) \mid S_{M(t)}] = \lambda S_{M(t)}$$

Άρα

$$E\Big[\sum_{i=1}^{M(t)} \big(\Lambda(S_i)-\Lambda(S_{i-1})\big)\Big] = \lambda E[S_{M(t)}]$$

$$= \lambda E\big[E[S_{M(t)} \mid M(t)]\big].$$

Όμως

$$E[S_{M(t)} \mid M(t)=n] = E[S_n \mid M(t)=n]$$

$$\underset{\uparrow}{=} E[U_{n:n}] = \frac{nt}{n+1}$$

Ιδιότητα δεσμευμένων χρόνων γεγονότων
$U_{n:n}$ είναι η μέγιστη από n ανεξάρτητες ομοιόμορφες στο $[0,t]$.

Άρα το ζητούμενο είναι

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} E[S_{M(t)} \mid M(t)=n]\, P[M(t)=n]$$

$$= \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt}{n+1} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^n}{n!}$$

$$= \lambda t \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^n}{n!} - \lambda t \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^n}{(n+1)!}$$

$$= \lambda t - \frac{\lambda t}{\mu t} e^{-\mu t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \lambda t - \frac{\lambda}{\mu} e^{-\mu t} (e^{\mu t} - 1)$$

$$= \lambda t - \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}).$$

Θέμα 3ο

(1) Από ΣΑΘ με αμοιβές

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t A(u)^2 du]}{t} = \frac{E[\int_0^{S_1} A(u)^2 du]}{E[S_1]}$$

Αλλά στο $[0, S_1]$ είναι $A(u) = u$ οπότε

$$E[\int_0^{S_1} A(u)^2 du] = E[\int_0^{S_1} u^2 du] = E[[\tfrac{u^3}{3}]_0^{S_1}] = \tfrac{1}{3} E[S_1^3] = \frac{\mu_3}{3}$$

ενώ $E[S_1] = E[X_1] = \mu_1$

Άρα

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[\int_0^t A(u)^2 du]}{t} = \frac{\mu_3}{3\mu_1}.$$

(2) $$H(t) = E[C(t)^3] = \int_0^{\infty} E[C(t)^3 \mid S_1 = x]\, dG(x)$$

Όμως

$$E[C(t)^3 \mid S_1 = x] = \begin{cases} x^3, & \text{αν } t < x \\ \underbrace{E[C(t-x)^3]}_{H(t-x)}, & \text{αν } x \le t \end{cases}$$

οπότε

$$H(t) = \underbrace{\int_t^{\infty} x^3 dG(x)}_{D(t)} + \int_0^t H(t-x)\, dG(x)$$ είναι η ανανεωτική εξίσωση.

Η $D(t)$ είναι μη-αρνητική, φθίνουσα και

$$\int_0^\infty |D(t)\,dt| = \int_0^\infty D(t)dt = \int_0^\infty\int_t^\infty x^3 dG(x)dt$$

$$= \int_0^\infty x^3 \int_0^x dt\, dG(x) = \int_0^\infty x^4 dG(x) = \mu_4 .$$

Το ΒΑΘ είναι εφαρμόσιμο και έχουμε

$$\lim_{t\to\infty} E[C(t)^3] = \lim_{t\to\infty} H(t) = \frac{\int_0^\infty D(t)dt}{E[\cancel{X_1}]} = \frac{\mu_4}{\mu_1}.$$